به نام خدای حسابرس

بخش اول

جامعه آماري

جامعه اي كه افراد آن حداقل يك صفت مشترك دارند.(كشور ايران)

صفت متغير

صفتي كه ازفردي به فرد ديگرمنتقل مي شود كه بر دو نوع زيرمي باشد كمي و كيفي

- پيوسته كليه اعداد حقيقي(قد ، سن) كمي
- گسسته اعداد صحيح(تعداد فرزندان، تعداد اتاق هاي خانه)

كيفي(جنسيت و دين)

مراحل انجام تحقيق آماري

1)جمع آوري اطلاعات
- سر شماري
- نمونه گيري

2)جمع آوري داده ها
- پرسش نامه
- غير پرسش نامه

3)استخراج داده ها
- دستي
- ماشيني

4)آمار توصيفي*
- معيارهاي مركزي(ميانگين، ميانه، چارکها و .....)
- معيارهاي پراکندگي(واريانس، دامنه تغييرات، انحراف معيار ، ضريب تغييرات ، چولگي ، کشيدگي)

فواصل اطمينان

5)آمار استنباطي(تامين نتايج نمونه به جامعه)

آزمونهاي فرضي

*آمار توصيفي(توصيف داده ها)

جدول توزيع فراواني

جدولي كه بر اساس فراواني مشاهدات تهيه مي شود.

فراواني ساده يا مطلق (f_i)

فراواني نسبي(f_c) فراواني ساده ÷كل $f_c = \frac{f^i}{n}$

فراواني تجمعي(F_i) فراواني ساده هر مشاهده + فراواني مشاهده قبلي

ني تجمعي نسبي(F_c) فراواني تجمعي ÷ تعداد كل مشاهدات فراوا $F_c = \frac{F^i}{n}$

درصد فراواني نسبي $F_c \times 100\%$ درصد فراواني تجمعي نسبي $F_c \times 100\%$

- مثال

نمره شش دانش آموز در جدول زير آمده است. مطلوبست جدول توزيع فراواني و محاسبه كليه فراواني ها

زان	دا
1	12
2	18
3	17
4	18
5	12
6	10

- حل

i	fi	Fi	fc	Fc	%fc×100	%Fc×100
10	1	1	1.6	1.6		
12	2	3	2.6	2.6		
17	1	4	1.6	4.6		
18	2	6	2.6	6.6		100
57	6		1		100	

نکات

1)همیشه جمع ستون فراواني ساده برابر تعداد کل مشاهدات است.

2)جمع ستون فراواني نسبي برابر يك است.

3)آخرين عدد ستون فراواني تجمعي برابر تعداد کل مشاهدات است.

4)آخرين عدد ستون فراواني تجمعي نسبي برابر يك است.

5)جمع ستون درصد فراواني نسبي برابر 100 است.

6)آخرين عدد ستون درصد فراواني تجمعي نسبي برابر 100 است.

جدول توزيع فراواني به روش طبقه بندي مشاهدات

روش طبقه بندي فقط براي داده هايي كه ماهيت پيوسته دارند انجام ميشود.
معمولا كمترين تعداد طبقه را 5 و بيشترين آن را 20 مي گيرند.

1)تعيين تعداد طبقات

فرمول استورگس $K=1+3/3 \log n$

تعداد مشاهدات

تعداد طبقات

*اگر جواب مثلا 3/23 در آمد حتما بايد آنرا رو به بالا رند كنيم كه مي شود 4

2)تعيين دامنه تغييرات

$D=X_{max}-X_{min}$

X_{max}= بيشترين X_{min}=كمترين داده -S داده+S

S= واحد گرد شده / 2

3)تعيين عرض (طول،فاصله)طبقه

$$W=\frac{D}{K}$$

عرض طبقه اگر اعشار نداشته باشد، به بالا رند مي كنيم.

- مثال

وزن هاي 40 قالب كره كه نزديك ترين عدد صحيح گرد شده اند به قرار زير است:

الف)يك جدول فراواني بر اساس طبقه بندي مشاهدات انجام دهيد.

ب)چند درصد قالب هاي كره داراي وزني بين 35/5_30/5 مي باشد.

ج)چند درصد قالب هاي كره كمتر از 30/5 مي باشد.

ح) مطلوبست محاسبه پارمترهاي مركزي(ميانگين،ميانه،مد،چارك)

د) مطلوبست محاسبه پارمترهاي پراكندگي(واريانس،انحراف معيار،متوسط انحراف)

52،25،24،47،36،51،34،38،46،33،47،36،38،50،47،34،41،40،42،40،26،29،30

32،30،35،37،37،41،21،31،30،26،35،45،23،43،31،34،43

• حل

1)تعيين تعداد طبقه

$K=1+3/3\log 40 = 1+3/3\times 1/6 = 6/28 \sim 7$

2)تعيين دامنه تغييرات

$S=\frac{1}{2}$

$X_{max}=52+0/5=52/5$ $X_{min}=21-0/5=20/5$

$d=52/5-20/5=32$

3)تعيين عرض طبقه

$W=\frac{d}{K}=\frac{32}{7}=4/5\sim 5$

	fi
20/5-25/5	3
25/5-30/5	6

www.pnu-m-s.com

30/5-35/5	10
35/5-40/5	8
40/5-45/5	6
45/5-50/5	5
50/5-55/5	2
	40

ب)52%=100 ×

%01

04

ج) 5/74%=100×91% ← جمع 3عدد اول در ستون دوم

40

- مثال

داده هاي زير يك نمونه 50 تايي از اندازه نيروي پارگي نخ هاي كتان مي باشد

21/2،27/3،20/6،25/4،36/9،28/3،33/7،29/534/1،24/6،27/1،29/4،21/8،27/5

28/9،25،21/9،37/5،9/6،24/8،32/7،29/3،33/5،22/2،28/1،29/5،17/3،29/6،22/7

25/4،30/2،29،26/8،33/3،34/5،23/9،36/8،28/7،33/2،23/6،23،29/2،34/8،37

38/4،26/4،23/5،18/6،28/3،24

مطلوبست جدول توزيع فراواني به روش طبقه بندي مشاهدات

- حل

1)تعيين تعداد طبقه

K=1+3/3log50 = 1+3/3×1/69=6/6~7

2)تعيين دامنه تغييرات

$$S=\frac{0/1}{2}$$

X_{min}= 17/3-0/05=17/25 X_{max}=38/4 +0/05=38/45

d=38/45-17/25=21/2

3)تعيين عرض طبقه

$$W=\frac{D}{K}=\frac{21/2}{7}=3/02\sim3/1$$

چون2صدم است و تبديل به دهم شده ولي اگر3/2 بود مي شد 4

	fi
17/25-20/35	2
20/35-23/45	7
23/45-26/55	10
26/55-29/65	17
29/65-32/75	3
32/75-35/85	6
35/85-38/95	5
	50

• تمرين

داده هاي زير قطر 50 بلبرينگ ساخته شده توسط يك كارخانه بر حسب اينچ مي باشد

0/731	0/738	0/743	0/740	0/736
0/736	0/728	0/737	0/736	0/735
0/733	0/745	0/736	0/742	0/740
0/739	0/733	0/730	0/732	0/739
0/741	0/735	0/732	0/745	0/727
0/725	0/733	0/738	0/734	0/732
0/742	0/725	0/728	0/736	0/737
0/732	0/735	0/744	0/729	0/739
0/727	0/736	0/734	0/735	0/736

0/734	0/730	0/728	0/724	0/741

الف)مطلوبست جدول توزيع فراواني به روش طبقه بندي

مشاهدات ب)مطلوبست محاسبه پارمترهاي مركزي

ج)مطلوبست محاسبه پارامترهاي پراكندگي

معيارهاي مركزي

1)ميانگين

اگر داده ها طبقه بندي نشده باشد(جدول توزيغ فراواني نداشته باشيم)

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

اگر

جدول توزيع فراواني داشته باشيم(چه طبقه بندي باشد چه نباشد)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$$

*در صورتيكه طبقه بندي نداشته باشيم x_i خود مشاهده است.

*درصورتيكه طبقه بندي داشته باشيم x_i نشان دسته

است،يعني حد بالا+حد پايين ÷ 2

• مثال

مطلوبست ميانگين نمره ها

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{87}{6} = 14/5$$ میانگین نمره ها

Xi	fi	fi xi
10	1	10
12	2	24
17	1	17
18	2	36
	6	87

صورت مثال ها در جلسات قبل مطرح شده است.

$$\bar{X} = \frac{\sum xifi}{n} = \frac{1475}{40} = 36/875 \approx 36/9$$

$$X_i = \frac{20/5 + 25/5}{2} = 23$$

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

---

2)میانه

الف)اگر طبقه بندي نداشته باشيم

تعداد مشاهدات

mموقعیت داده میانه ها $= \frac{n+1}{2}$

داده m ام میانه است.

ب)اگر طبقه بندي داشته باشيم(*ابتدا طبقه میانه را پیدا کن)

$$med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$\frac{n}{2}$ تعداد مشاهدات

F_{i-1} فراواني تجمعي ماقبل میانه

I عرض طبقه

L حد پایین طبقه میانه

f_i فراواني بازده طبقه میانه

*میانه نقطه اي است که نصف مشاهدات سمت راست آن و نصف دیگر مشاهدات سمت چپ آن قرار گیرد.

- مثال براي الف

میانه داده هاي زیر را بدست آورید.

5 8 0 2 3 12

مرتب

0 2 3 5 8 12

$\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3/5$ موقعیت میانه $\overline{m}$

داده شماره 3/5 میانه است ⇐ $\frac{3+5}{2}=4$

- مثال براي ب

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

$$med = L^{+2}\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$$\text{میانه } 35/5^{+\frac{\frac{40}{2} - 19}{8}} \times 5 = 36/125$$

3)چارکها

الف)اگرداده ها طبقه بندي نباشد.

$$_1Q \text{ موقعیت } = \frac{1}{4} \times N$$

N= تعداد کل مشاهدات (صدك25ام)

$$_3Q \text{ موقعیت } = \frac{3}{4} \times N$$

(صدك 75ام)

ب)اگر داده ها طبقه بندي باشد.

ابتدا طبقه چارك اول و طبقه چارك سوم را پيدا مي كنيم.

$$Q = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

$\frac{N}{4}$ تعداد كل مشاهدات

F_{i-1} فراواني طبقه ما قبل Q_1

L حد پايين طبقه

I عرض طبقه

f_i فراواني ساده طبقه Q_1

چارك اول

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \times I$$

F_{i-1} فراواني طبقه ما قبل Q_3

f_i فراواني ساده طبقه Q_3

L حد پايين طبقه چارك سوم

I

عرض طبقه

• مثال

Q_1 طبقه

www.pnu-m-s.com

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه Q_3

$$\frac{3}{4}\times 40 = 30$$

$$\frac{1}{4}\times 40 = 10$$

سي امين داده كدام طبقه است؟

دهمين داده كدام طبقه است؟

$$\frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi}\times I$$

$$Q = L + \frac{N - F_{i-1}}{\quad}$$

$$Q = L + 4\,fi \times I$$

3

$$Q_3 = 40/5 + \frac{\frac{3}{4} - 40 - 27}{6}\times 5 = 43$$

$$Q_1 = 30/5 + \frac{\frac{1}{4} - 40 - 9}{10}\times 5 = 31$$

www.neveshtani.com

4)صدکها

الف)اگر داده ها طبقه بندي نشده باشد.

Pموقعیت صدك n×p=ام

ب) اگر داده ها طبقه بندي شده باشد.

$$\text{صدك pام} = L + \frac{Np - F_i - 1}{f_i} \times I$$

I عرض طبقه N تعداد کل مشاهدات

F_i-1 تجمعي ماقبل صدك f_i فراواني ساده طبقه صدك

L حد پایین طبقه

صدك

- مثال

طبقه صدك بيستم

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

طبقه

صدك هشتادم

محاسبه صدك بيستم و هشتادم؟

- حل

$$\text{صدك بيستم} = L + \frac{N\times 0/2 - F^{i-1}}{f_i}\times I$$

$$0/2\times 40=8$$

داده هشتم در کدام طبقه قرار دارد؟

$$\text{صدك بيستم} = 25/5 + \frac{40\times 0/2 - 3}{6}\times 5 = 29/5$$

$$N\times 0/8-F_i-1$$

صدك هشتادم = $L+$ _____ $\times I_{f_i}$

$0/8\times 40=32$

داده سي ودوم در كدام طبقه قرار دارد؟

$$\frac{40\times 0/8-27}{6}\times 5=44/6$$

صدك هشتادم $=40/5+$

5)مد(نما)

الف) اگر داده ها طبقه بندي نشده باشد

در جدول توزيع فراواني داده اي كه داراي بيشترين فراواني است مد مي باشد.

www.pnu-m-s.com

ب) اگر داده ها طبقه بندي شده باشد

ابتدا طبقه مد را معلوم مي كنيم.

$$L + \text{مد} = \frac{\overline{d^1} \times I}{d_1 + d_2}$$

I فاصله طبقه d_1 اختلاف فراواني طبقه مد از طبقه قبلي

d_1+d_2 اختلاف فراواني طبقه مد با طبقه بعدي L حد پايين طبقه مد

www.nevshtani.com

- مثال

طبقه مد

	fi	xi	xi fi	Fi
20/5-25/5	3	23	69	3
25/5-30/5	6	28	168	9
30/5-35/5	10	33	330	19
35/5-40/5	8	28	304	27
40/5-45/5	6	43	258	33
45/5-50/5	5	48	240	38
50/5-55/5	2	53	106	40
	40		1475	

- حل

$$\text{مد} = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times I$$

$$\text{مد} = 30/5 + \frac{4}{4+2} \times 5 = 33/8$$

6)ميانگين هندسي(**GM**)

$$GM = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} \ldots\ldots\ldots x_k^{f_k}}$$ n تعداد کل مشاهدات

www.neveshtani.com

- مثال

رشد سالانه اشتغال در جامعه اي بين سال هاي 76-59 به صورت زير است:

3،3/1،3/2،3/5،3/6،3/8،3/8،3/9،4

- حل

$$GM=\sqrt[9]{3\times3/1\times3/2\times3/5\times3/6\times3/8^2\times3/9\times4}=x^{\frac{1}{9}}=3/53$$

7)ميانگين همساز(هارمونيك)

$$\overline{X}_H=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

- مثال

تعداد 5 نفر از كاركنان يك موسسه كاري را به ترتيب در مدت 16،21،8،01،6 روز تمام مي كنند.متوسط تعداد روزهايي كه اين كار تمام شود چقدر است(ميانگين هارمونيك)

- حل

$$\overline{X}_H=\frac{5}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}}=9/3$$

$$\overline{X}_H=\frac{n}{\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+....+\frac{f_k}{x_k}}$$

8)ميانگين پيراسته

براي محاسبه اين ميانگين ابتدا چارك اول و چارك سوم را بدست مي آوريم; سپس داده هاي كمتر از چارك اول و داده هاي بيشتر از چارك سوم را حذف مي كنيم و ميانگين داده هاي باقيمانده را بدست مي آوريم.

9)ميانگين ويزوري

ابتدا چارك اول و سوم را بدست مي آوريم. به جاي داده هاي كمتر از چارك اول ، خود چارك اول و به جاي داده هاي بيشتر از چارك سوم ،خود چارك سوم را قرار مي دهيم،سپس ميانگين كل اعداد را بدست مي آوريم.

- مثال

9كارگر صنعتي تحت آزمون قرار گرفته اند و اندازه هاي زير بدست آمده:

136/7،105/8،132/1،125،152/4،116/4،93/9،106/5،128/3

مطلوبست محاسبه ميانگين پيراسته و ويزوري؟

- حل

مرتب مي كنيم

93/9،105/8, 116/4،132/1،125،128/3،132/1،136/7،152/4

0/25×9=2/25~3 Q_1

0/75×9=6/75~7 Q_3

$$\text{ميانگين پيراسته} = \frac{106/5+116/5+125+128/3+132/1}{} = 121/66$$

5

/5+106/5+106/5+116/4+125+128/3+132/1+132/1+132/1 =120/16

ميانگين ويزوري= 106

9

معيارهاي پراگندگي

1)دامنه تغييرات

$$D=X_{max}-X_{min}$$

2)انحراف متوسط

$$AD=\frac{\sum_{i\text{-}1}^{k} t_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

3)واريانس

$$\delta = \frac{\sum_{i.1}^{k} \left(X_i - \overline{X}\right)}{n}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{ik.1} f_i X_{i\,2}}{n} - \left(X\right)_2}$$

توصيه استاد

4)انحراف معيار

جذر واريانس

*در صورتي كه داده ها طبقه بندي نشده باشد x_i خود مشاهده است.

*در صورتي كه داده ها طبقه بندي شده باشد x_i نماينده هر طبقه است.

- مثال

fi	xi	xi fi	Fi	fi |xi-x̄|	x²i fi
3	23	69	3	3×| 23-36/9 |=41/7	(23²)×3=1587
6	28	168	9	6×|28-36/9|=53/4	4704
10	33	330	19	39	1089
8	28	304	27	8	11552
6	43	258	33	36/6	11094
5	48	240	38	55/5	11520
2	53	106	40	32/2	5618
40		1475		267/2	56965

- حل

$$AD=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\left|X_i-\bar{X}\right|}{n} \Rightarrow AD=\frac{267/2}{40}=6/68$$

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i^2}{n}-\left(\bar{X}\right)^2} \searrow \delta^2=\frac{56965}{40}-(36/9)^2$$

$$=1424/25-136/61=62/51$$

$\delta = \sqrt{2/51} \Rightarrow \delta = 7/9$

$\bar{X} = 36/9$

5)پراکندگي نسبي(ضريب تغييرات)

براي مقايسه دو جامعه اي که هم ميانگين و هم انحراف معيارشان متفاوتند از ضريب تغييرات استفاده مي کنند.

$$c.v = \frac{\delta}{\bar{X}}$$

- مثال

يك توليد کننده لامپ تصوير 2 نوع لامپ توليد مي کند. نوعA ونوع B ; عمر متوسط A برابر 1495وانحراف معيارآن برابر280ساعت است.

عمر متوسط B برابر 1875وانحراف معيار آن برابر310ساعت است.توليد کننده در توليد کدام يك از اين دو لامپ موفق تر بوده(محاسبه ضريب تغييرات)

- حل

$$cv._A = \frac{280}{1495} = 0/187$$

$$cv._B = \frac{\delta_B}{\bar{X}_B} = \frac{320}{1875} = 0/165$$

$\%c.v_A = 0/187 \times 100 = \%18/7$ $\%c.v_B = 0/165 \times 100 = \%16/5$

*تولید کننده در تولید لامپ B موفق تر بوده است.

6) کشیدگي

$$\alpha_4 = n\,\delta_4 \qquad \delta_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{1}$$

*کشیدگي توزیع نرمال 3 است.

7)چولگي

پیرسون $skp = \delta$ $\Rightarrow$ $\frac{\bar{X} - \text{مد}}{}$

$\alpha_3 = n\,\delta_3$ $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{1}$

$\alpha = 0$ توزیع نرمال ;چولگي ندارد

| |

تو

زيـع به طور تقريبي نرمال ; قابل چشم پوشي ; چولگي كم دارد $\alpha 0/^{1}$

توزيـع چولگي دارد $0/^{1}\alpha 0/5$

توزيـع شديدا چولگي دارد $\alpha 0/5$

- مثال

داده هاي زير يك نمونه 50 تايي از اندازه نيروي پارگي نخ هاي كتان مي باشد

21/2،27/3،20/6،25/4،36/9،28/3،33/7،29/534/1،24/6،27/1،29/4،21/8،27/5

28/9،25،21/9،37/5،9/6،24/8،32/7،29/3،33/5،22/2،28/1،29/5،17/3،29/6،22/7

25/4،30/2،29،26/8،33/3،34/5،23/9،36/8،28/7،33/2،23/6،23،29/2،34/8،37

38/4،26/4،23/5،18/6،28/3،24

الف)محاسبه پارامترهاي مركزي ب)محاسبه پارمترهاي پراكندگي

- حل

x	fi	Fi	xi fi	xi	i | xi-x¯	fi x²i	(Xi-x¯³)
17/25-20/35	2	2	37/6	18/8	18/6	706/8	-753/408
20/35-23/45	7	9	153/3	21/9	43/4	3357/2	-823/832
23/45-26/55	10	19	25	25	31	6250	-97/92
26/55-29/65	17	36	477/7	28/1	0	13423/3	0
29/65-32/75	3	39	93/6	31/2	9//3	2920/3	29/7
32/75-35/85	6	45	205/8	34/3	37/2	7058/9	238/32

35/85-38/95	5	50	187	37/4	46/5	6993/8	804/3
	50		1405		186	40710/5	0

$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{1405}{50} = 28/1$, $x = \frac{17/25+20/35}{2} = 18/8$

1) میانگین

$med = L + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \times I$, $med = 26/55 + \frac{\frac{50}{2} - 19}{17} \times 3/1 = 27/64$

2) میانه

$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$, $Q_1 = 23/54 + \frac{\frac{50}{4} - 9}{10} \times 3/1 = 24/35$ چارك اول

$\frac{50}{4} = 12/5$ ⟸ چارك اول

$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F_{i-1}}{fi} \times I$, $Q_3 = 29/65 + \frac{\frac{3}{4} \times 50 - 36}{3i} \times 3/1 = 31/2$ 4) چارك سوم

$\frac{3}{4} \times 50 = 137/5$ ⟸ چارك سوم

$$Np-F_i-1$$

)5 صدك pام = $L+$ _____ $f_i \times I$, n×p=0/31×5=15/5

$$\text{صدك 31ام} = 23/54+\frac{15/5-9}{10}\times 3/1=25/46$$

$$d$$

)6 مد = $L+$ _____ $d_1+{}_1d_2\times I$, 26/55+ _____

717+17−10−3×3/1= 27/58

متوسط AD= = $186\frac{\sum_{i1}^{k} t_i\left|X_i-\overline{X}\right|}{n}$ ___ 50

7) انحرافات

$${}_2\sum_{k1}^{i} f_i X_{i2} \quad {}_2 \quad {}_2 \quad 40710/5 \quad {}_2$$

)8 واريانس δ = _____ $-(\ )X$, δ = _____ $-(28^{/1})$ =

24/6 n 50

انحراف معيار $\delta=\sqrt{24/6}=4/96$ (9

$$\overline{X}-\text{مد} \qquad 28/1-27/58$$

چولگي پيرسون $skp=\delta$, $skp=4$ _____ /96 =01/40≈0/1 (10

مقدار چولگي كم است.

11) ضريب تغييرات $c.v=\frac{\delta}{\bar{X}}$, $c.v=\frac{4/96}{28/1}=0/17$

درصد ضريب تغييرات %0/71×100=%71

$$\frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{\delta^3}$$

12) $\alpha_3=\frac{50}{(4/96)^3}\times 0=0$, α چولگي عادي

توزيع نرمال ;چولگي ندارد

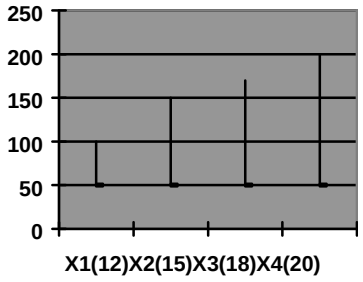
www.neveshtani.com

نمودارهاي آماري

1)ميله اي

محور x(افقي)،حور مشاهدات(يا خود مشاهده يا نشان دسته)و محور y(عمودي)،محور فراواني است.

xi	fi
12	2
15	1
18	2
20	1

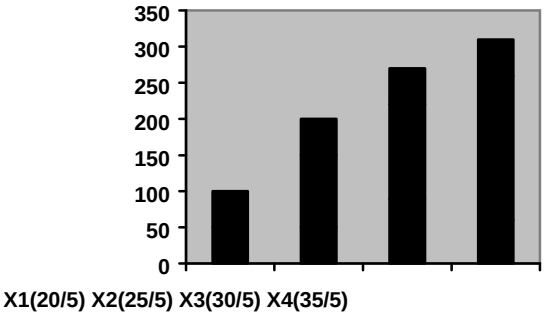


2)مستطيلي (هيستوگرام)

اين نمودار فقط براي داده هاي طبقه بندي شده به كار مي رود .

محورxمحور مشاهدات است(حدود پايين طبقات را روي محورx قرار مي دهيم)

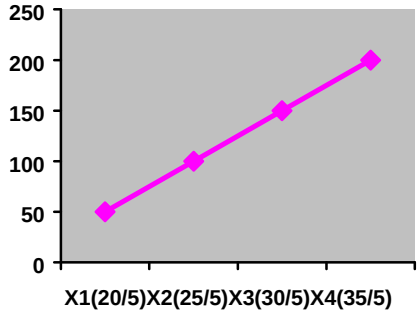
xi	fi
20/5-25/5	2
25/5-30/5	3



3)چند ضلعي(پلي گون)

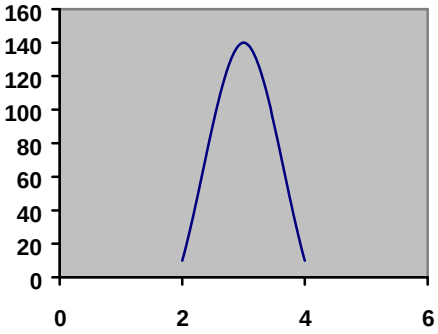
از روي نمودار ميله اي ومستطيلي ساخته مي شود.

كافي است در نمودار ميله اي سر نمودار را به هم وصل كنيم و در نمودار مستطيلي وسط اضلاع را به هم ديگر وصل كنيم.



4)منحني فراواني

در صورتي كه تعداد مشاهدات زياد باشد. تعداد مستطيل ها زياد مي شود و به دنبال آن نمودار پلي گون هم از نقاط شكسته زيادي تشكيل خواهد شد كه ظاهر شكل منحني مانند است.



5)دايره اي

اين نموداربسشتر براي داده هاي كيفي به كار مي رود.

به اين ترتيب كه نسبت هر مشاهده كيفي را روي دايره نشان مدهد.

f_i

$d_i = \frac{n}{} \times 360$

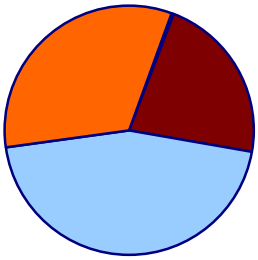
• مثال

در کارخانه اي کالاها بر اساس کیفیت توزیع شده اند .

مطلوبست نمودار دایره اي

*صورت سوال

	fi	fc	di(در)
	10	⅛	⅛×360=45
	30	⅜	⅜×360=135
ب	40	1÷2	1÷2×360=180
	80		



نارنجي(متوسط) قرمز(بد) آبي(خوب)

www.neveshtani.com

نویسنده:
ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت , دانشگاه رودهن)

www.neveshtani.com

تهیه و تنظیم:

www.neveshtani.com

بزرگترین مرکز دانلود رایگان جزوات دانشگاهی و مدرسه ای

بخش دوم

احتمال

آزمايش جمع آوري داده هايي كه پيشامد هاي آن متفاوتند.

فضاي نمونه**(S)** مجموعه اي است از تمام حالت هاي ممكن يك آزمايش.

پيشامد ساده**(e)** تك تك اعضاي فضاي نمونه را پيشامد ساده مي گويند.

پيشامد مركب(E)مجموعه اي است از تعدادي پيشامد ساده،بزرگترين پيشامد مركب فضاي نمونه است.

آزمايش پرتاب يك سكه $S=\{$ خ ، ش $\}$ $E=\{$ خ $\}$

آزمايش پرتاب يك تاس $S=\{1،2،3،4،5،6\}$ $E=\{1،3،5\}$

آزمايش پرتاب دو سكه $S=\{$(خ ،خ) (ش،ش) (ش،خ) (خ،ش)$\}$ $E=\{$(خ ،خ) (ش،ش)$\}$

آزمایش پرتاب سه سکه $S=\{$ (خ خ خ) (خ خ ش) (خ ش خ) (خ ش ش) (ش خ خ) (ش خ ش) (ش ش خ) (ش ش ش) $\}$

$E=\{$ (خ خ ش) (خ ش ش) $\}$

تعداد اعضاي فضاي نمونه N_s

روش اول

$\mathbf{N_s}$(تعداد اعضاي فضاي نمونه)

- در صورتيكه هر آزمايش دو حالتي باشد. $N_s=2^n$
- در صورتيكه هر آزمايش سه حالتي باشد. $N_s=3^n$
- در صورتيكه هر آزمايش m حالتي باشد. $N_s=m^n$

روش دوم

قاعده ضرب: هرگاه چندين آزمايش پي در پي انجام شود،به طوريكه آزمايش اول به n_1طريق ، آزمايس دوم به n_2 طريق در اين صورت فضاي نمونه برابر با صورت حاصلضرب

$N_s= n_1\times n_2\times\ldots.$

آزمايش پرتاب يك سكه و تاس تعداد فضاي نمونه و خود فضاي نمونه را بنويسيد.

• مثال

در

{ (خ6) (خ5) (خ4) (خ3) (خ2) (خ1) (ش6) (ش5) (ش4) (ش3) (ش2) (ش1) }

محاسبه احتمال در حل مثال ها

حالتيكه شانس حالات مختلف هر آزمايش مساوي .

1 e)باشد

در آزمايش--------احتمال-------- ؟

E{ ----- ------}

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}$$

N_e تعداد اعضاي پيشامد مركب E ، تعداد حالات مساعد

N_s تعداد اعضاي فضاي نمونه ، تعداد حالات ممكن

• مثال

در آزمايش پرتاب يك تاس احتمال اينكه عدد روي وجه حداقل 4 باشد.

E {4،5،6}

1 N_e3

$$P(E) = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{}$$
$$2 \quad N_s 6$$

• مثال

در

آزمایش پرتاب یك تاس احتمال اینکه وجه فرد باشد.

$$E\{1,3,5\} \qquad P(E)=\frac{N^e}{N_s}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

• مثال در

آزمایش پرتاب 2سکه

الف)احتمال اینکه هر دو سکه یك جور بیاید ب)احتمال اینکه سکه اول همیشه شیر بیاید

$$N_s=2^2=4 \qquad P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

الف) {(خ خ) (ش ش)}

$$P(E)=\frac{N_e}{N_s}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ب) {(خ ش) (ش ش)}

2)حالتیکه شانس حالات مختلف هر آزمایش مساوي نباشد.

e

در آزمایش--------احتمال-------- ؟

$$E=\{e_1,e_2,\ldots..\}$$

• مثال

$P(E)=P(e_1)+P(e_2)+\ldots\ldots$

خانوادهاي 3 فرزندي در صورتيكه شانس دختر بودن هر فرزند0/7باشد.

الف)احتمال اينكه هر سه فرزند يك جنس باشند چقدر است؟

E (د {(پ پ پ) (د د د)}

P(E)= P(د د د)+ P(پ پ پ) 0/7×0/7×0/+7 0/3×0/3×0/3=0/37

ب)احتمال اينكه حداقل 2 پسر داشته باشيم؟

E (پ {(پ پ پ) (پ د پ) (پ پ د) (د پ پ)}

$P_E=P(پ پ پ)+P(پ د پ)+P(پ پ د)+P(د پ پ)$

0/3×0/3×0/7+0/7×0/3×0/3+0/3×0/7×0/3+0/3×0/3×0/3=0/21

ج)احتمال انكه حداكثر يك پسر داشته باشيم؟

E (د {(د د د) (پ د د) (د پ د) (د د پ)}

• مثالدر

P_E=P(د د د)+P(د د پ)+P(د پ د)+P(پ د د)

0/3×0/7×0/7+0/7×0/3×0/7+0/7×0/7×0/3+0/7×0/7×0/7

دو تاس را پرتاب مي كنيم در صورتيكه شانس آمدن هر وجه فرد 2برابر وجه زوج باشد.

الف)احتمال اينكه هر دو تاس يك جور بيا يد.

ب)احتمال اينكه تاس اول عدد يك و تاس دوم بيشتراز4 باشد.

ج) احتمال اينكه جمع اعداد روي دو تاس حداكثر4باشد.

1،2،3،4،5،6

2a+a+2a+a+2a+a=1

9a=1 $a=\frac{1}{2}$

P(هر وجه زوج)=$\frac{1}{9}$ P(هر وجه فرد)=$\frac{2}{9}$

الف)

E {(1،1) (2،2) (3،3) (4،4) (5،5) (6،6)}

P_E=P(1،1)+P(2،2)+P (3،3) +P(4،4)+P(5،5)+ P(6،6)

$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{15}{81}$

- مثال

www.neveshtani.com

ب)

$$E\begin{cases}(1،5)\\(1،6)\end{cases}$$

$$P_E=P(1،5)+P(1،6) \qquad \frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{6}{81}$$

ج)

$$E\begin{cases}(1،3)\ (3،1)\ (2،2)\ (2،1)\ (1،2)\\(1،1)\end{cases}$$

$$P_E=P(1،3)+P(3،1)+P\ (2،2)\ +P(2،1)+P(1،2)+\ P(1،1)$$

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{17}{81}$$

اجتماع و اشتراك پيشامدهاي مركب

- مثال

در خانواده اي 3 فرزندي اگر پيشامد G كمتر از 2 دختر وH همه از يك جنس باشند.

احتمال$G\cap H$ و $G\cup H$

- حل

G {(پ پ پ) (پ د پ) (پ پ د) (د پ پ) (پ د د)}

H {(پ پ پ) (د د د)}

G ∪ H {(پ پ پ) (پ پ د) (پ د پ) (پ د د) (د پ پ) (د پ د) (د د د)}

$P(G \cup H) = \frac{N^G \cup H}{N_S} = \frac{5}{8}$

G∩H {(پ پ پ)}

$P(G \mid H) = \frac{N^G \mid H}{N_S} = \frac{1}{8}$

قانون جمع احتمالات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \mid B)$$

[1] $P(E)+P(E)=$

قانون متمم

دو پيشامد ناسازگار

A و B ناسازگارند اگر $A\cap B=\emptyset$ باشد.

در اين صورت $P(A\cap B)=0$ و بنابر اين

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

- مثال

5نفر در كنكور شركت كنند،احتمال اينكه حداقل يكي از آنها قبول شودچقدر است؟

- حل

$$\bar{E}\ \{(ررررر)\}$$

$$P(\bar{E})=\frac{N_{\bar{E}}}{N_S}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

$$P(E)+P(\bar{E})=1 \qquad P(E)+\frac{1}{32}=1 \qquad P(E)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

▒ اگر مي خواست حداقل رو پيدا كنه خيلي طول مي كشيد. بنابر اين حداكثر رو پيدا كرد كه در اون همه كوچكتر از يك مي شد. كه همه رد بودند و $\bar{E}$ متمم E است.

www.neveshtani.com

ب)احتمال اينكه هيچ ورزشي نكند.

- حل

فوتبال (f) 60% از تمام پسران ←

0p(f)=/6 بسکتبال(b) 50% از تمام پسران

0p(b)=/5

←

فوتبال و بسکتبال(f∩b) از تمام پسران ← 0p(f∩b)=/3

الف) $p(f \cup b) = ?$

$$p(f \cup b) = p(f) + p(b) - p(f \cap b)$$

$$p(f \cup b) = 0/6 + 0/5 - 0/3$$

$$p(f \cup b) = 0/8$$

- مثال

در دانشكده پسران به نسبتهاي زير در رشته هاي ورزشي مختلف فعاليت دارند.

فوتبال 60% از تمام پسران ، بسکتبال 50% ، فوتبال و بسکتبال هردو03% اگر پسري به تصادف انتخاب شود.

الف)فوتبال يا بسکتبال بازي کند(احتمال اينکه حداقل يکي از دو ورزش را انجام دهد)

ب) p(E)=?

$\overline{E}$ ورزش کند(حداقل يكي از دو ورزش را انجام دهد) $(f \cup b)$

$$P(f \cup b) = P(\overline{E})$$

$$P(\overline{E}) = 0/8$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P(E) + 0/8 = 1$$

P(E)=1-0/8=P(E)=0/2

www.neveshtani.com

احتمال شرطي

B A

در آزمایش _____پیشامد_____رخ داده احتمال_____؟

$$P(B|A)$$

$$P(B \cap A) = P(A)$$

- مثال

در خانواده اي كه سه فرزند دارد فرض كنيد معلوم شده است تعداد دختران كمتر از 2تا است.

احتمال اينكه هر سه فرزند از يك جنس باشند چقدر

است؟ الف)شانس پسر بودن0/5 ب)شانس

دختر بودن0/4

- حل

$$P(E \cap H) = P(E|H)$$

$$P(H)$$

P(د)=0/5 P ((الف)5/0پ) =

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H) = \frac{N_H}{N_S} = \frac{4}{2} = 2$$

E {(پ پ پ) (د د پ)} E∩H {(پ پ پ)}

$$P(E \mid H) = \frac{N_{E \mid H}}{N_S} = \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

$$P(E \cap H) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

ب) P (پ) = 0/6 P(د)=0/4

H {(پ پ پ) (د پ پ) (پ د پ) (پ پ د)}

$$P(H) = \frac{N_H}{N_S} = \frac{4}{2}$$

E {(پ پ پ) (د د پ)} E∩H {(پ پ پ)}

P(H)= P(پ پ د)+ P(پ د پ) +P(د پ پ)+p (پ پ پ)

0/4×0/6×0/6+0/6×0/6×0/4+0/6×0/4×0/6+0/6×0/6×0/6=0/36

P(E∩H)=P(پ پ پ)

$$P(E \cap H) = \frac{0/216}{0/36} = 0/6$$

$P(E \cap H) = 0/6 \times 0/6 \times 0/6 = 0/216$

• مثال

در آزمون وكلا از بين 5 نفر اعلام كردند كه حداكثر يك نفر قبول مي شود; احتمال اينكه همه در اين آزمون رد شوند چقدر است؟

• حل

A (ررررر)

B (ررق ر) (ق رررر) (ررررق) (ررررر) (رق ررر) (ررق رر)

A∩B (ررررر)

$P(B)=\_\_326$ $P(A|\overline{B})=\overline{21}_5=321$ $P(A|B)=\frac{1}{32}=1$

$P(A|B)=\frac{6}{32}$ 6

فرمول كاربرد احتمال شرطي

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = P(B) \times P(A \cap B)$$

$$P(B \cap A) = \frac{P(B|A)}{P(A)} \Rightarrow P(B|A) = P(A) \times P(B \cap A)$$

در صورتيكه دو پيشامد **A**و**B** ار هم مستقل نباشند به عبارتي به يكديگر وابسته باشند احتمال اشتراك آنها را از يكي از دو فرمول بالا به دست مي آيد.

www.neveshtani.com

• مثال

سه لامپ معيوب به طور غير عمدي با 6 لامپ سالم مخلوط شده اند. اگر براي چراغ سقف 2 لامپ به تصادف انتخاب شود/

الف)احتمال اينكه هر دو سالم باشد؟

ب)احتمال اينكه اولي سالم و دومي معيوب باشد چقدر است؟ ج) احتمال اينكه يكي معيوب و يكي سالم باشد چقدر است؟

• حل

6 لامپ سالم ، 3 لامپ معيوب = 9 لامپ

الف) $E \{(س\ س)\}$

$$P(E)= P\ (س\ س)=P\ (اولي\ س) \times P\ (دومي\ س\ |\ اولي\ س) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8}$$

(دومي س) چون از 6 لامپ سالم يكي را قبلا كم كرده است.

ب)

E (س س) { }

P(E)= P (دومي س اولي س) =P (اولي س) × P (دومي م |اولي س) =$\frac{3}{8} \times \frac{6}{9}$

ج)

E (س م) (م س) { }

P (E)=P(س م)+P(م س)

P(اولي س) × P (دومي م |اولي س) + P(اولي م) × P (دومي س |اولي م)

$\frac{3}{8} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}$

www.neveshtani.com

• مثال

ظرفي حاوي 5 مهره قرمز و 7 مهره سفيد است. مهره اي را به طور تصادف از ظرف خارج مي كنيم و به جاي آن 2 مهره به رنگ ديگر در داخل ظرف مي اندازيم و سپس مهره دوم را از ظرف بيرون مي آوريم ؛ هر يك از اين احتمالات را به دست آوريد؟ الف) احتمال اينكه هر دو مهره همرنگ باشد.

ب) احتمال اينكه هر دو مهره سفيد باشد در صورتي كه بدانيم هر دو همرنگ هستند.

• حل

الف)

P (E)=P(اولي ق|دومي ق)

P(اولي ق) × P (دومي ق | اولي ق) = $\frac{5}{12} \times \frac{4}{13} = 0/12$

P (E)=P(اولي س|دومي س)

P(اولي س) × P (دومي س | اولي س) = $\frac{7}{12} \times \frac{6}{13} = 0/26$

P(اولي ق) × P (دومي ق | اولي ق)+P(اولي س) × P (دومي س | اولي س)

=0/12+0/26 = 0/38

ب)

P (E)=P(دومي س|اولي س) =0/26

P(س س) + P(ق ق)=0/38

$$\frac{0/26}{0/38} = 0/68$$

جايگشتها

ترتيب(ترتيب مهم است)

$n \times n-1 \times \ldots (n-r+1)$

راه اول

راه دوم

$$P_r^{\,n} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(انتخاب r شي از n شي)

- مثال

سه نفر را به چند طريق مي توان از بين 50 نفر انتخاب كرد به طوري كه روي 3 صندلي بنشينند.

- حل

• مثال

راه اول

$50 \times 49 \times 48$

راه دوم

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47!}{47!} = 50 \times 49 \times 48$$

- مث
ال

پانزده نفر در يك مسابقه دوچرخه سواري شركت مي كنند.به چند طريق مي توان جوايز اول، دوم،سوم را بين افراد شركت كننده در مسابقه اهدا كرد؟

- حل

راه اول $15\times14\times13$

راه دوم $^{15}_{3}P = \frac{15!}{(15-!)3} = \frac{15!}{12!} = \frac{15\times14\times13\times12!}{12!} = 15\times14\times13$

تركيب(ترتيب مهم نيست)

$^{?}n^{?} \qquad n!$

$^{?}r^{?}\,^{?} = \frac{}{r!(n-r!)}$ تركيب انتخاب r شي از n شي

- مث
ال

از بين 5 مهندس عمران، 4 مهندس مكانيك چند كميته 5 نفري مركب از 3 مهندس عمران و 2 مهندس

$^{?}5^{?}\,^{?}4^{?} \qquad \frac{!5}{}\,\frac{!4}{} \qquad \frac{5\times4\times3!}{3!\times2}\times\frac{4\times3\times2!}{2\times2!}$

$^{?}3^{?}\times^{?}2^{?} =$

$!3\times!2\times\ !2\times!2 \Rightarrow$

مكانيك ميتوان تشكيل داد؟

- حل

$$\Rightarrow 10\times 6 = 60$$

- مثال

به چند طريق مي توان 3 كتاب از 5 كتاب سال اول و 4 كتاب از 6 كتاب سال دوم را در يك قفسه چيد بطوري كه كتاب هاي سال اول سمت چپ كتاب هاي دوم باشد؟

- حل

$$4!\times 3!\times \square\square\square\square 64\square\square\square\square\times\square\square\square\square 53\square\square\square\square$$

- مثال

درون ظرفي 3 مهره سياه و 2 مهره سفيد ، 4 مهره سبز وجود دارد.از اين ظرف 4 مهره با هم و بدون جايگذاري خارج مي كنيم.

الف) احتمال اينكه دو مهره سياه خارج شده باشد.

ب) احتمال اينكه دو مهره سفيد و يك مهره سبز خارج شود.

ج) احتمال اينكه دو تاي اول سياه باشد.

د) احتمال اينكه دو تاي اول سفيد و آخري سبز باشد.

- حل

الف) $P(E) = \frac{N_{ES}}{N} = \frac{C_3^3 \times C_9^6 \times C_2^2}{C_{14}^{18}} \Rightarrow \frac{1 \times 84 \times 1}{\frac{18!}{6!12!}} = \frac{84 \times 6!12!}{18!} = \frac{84 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13} = \frac{84}{1542}$

$C_4^4 \times C_5^4$ $\quad 5 \times 4!$ $\quad 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$C_2^2 \times C_4^4 \times C_3^3$

ب) $P(E) = \frac{C_2^2 \times C_{19}^{19} \times C_1^1}{C_{14}^{18}}$

$C_4^4 \times C_5^4$

$5!$

ج) $P(E) = \frac{N_S^E}{N} = \frac{P_{23} \times P_4^9 \times P_{26}}{P_{23}} = \frac{\frac{3!}{1!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!}}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} \Rightarrow 9 \times 68 \times 67 \times 56 = 3024180$

د) $P(E) = \frac{P^{22} \times P^{13} \times P^{14}}{P_4} \Rightarrow \frac{1 \times 3 \times 4 \times 1}{9} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{} = 252$

• مثال

يك كميته مشورتي كه درباره اصلاح وضع زندان ها مطالعه مي كند مركب از 15 عضو است.درباره برنامه خاصي 9 نفر موافق، 4 نفر مخالف و 2 نفر بي طرف هستند. خبرنگاري علاقه مند است 3 نفر را به طور تصادفي از اين كميته برگزيند.

الف)احتمال اینکه دو نفر اول موافق و نفر سوم مخالف باشند.

ب) احتمال اینکه دو نفر مخالف و یك نفر موافق باشند.

ج) احتمال اینکه هر سه نفر موافق باشند.

د) احتمال اینکه هر سه نفر بیطرف باشند.

هـ) احتمال اینکه حداقل دو نفر موافق برنامه باشند چقدر است.

• حل

الف) $P(E) = \frac{\binom{9}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{9!5!4!3!}{15!7!}$

ب) $P(E) = \frac{N_S}{N} \Rightarrow N_S = \binom{15}{3} = \frac{15!}{12!3!}$

$N_E = \binom{9}{2}\binom{6}{1} \Rightarrow or \quad \frac{P_{39}}{P_{315}}$

ج) $P(E) = \frac{N_S}{N} = \binom{15}{3}$

www.neveshtani.com

N^E

د) $P(E) = \frac{}{N_S} = 0$

هـ) به طور كلي آزمايشهايي كه از هم مستقل نباشند يعني به هم وابسته باشند (استخراج بدون جايگذاري)را مي توان به 2 طريق حل كرد

1) از راه فرمول كاربرد احتمال شرطي $P(A \cap B)=p(A)\times P(B|A)$

2)از راه $P(E) = \frac{N_E}{N_S}$ كه N_E و N_S را مي توان با توجه به مسئله از فرمول هاي ترتيب و تركيب استفاده كرد.

انتخاب 3 نفر (احتمال حداقل 2 نفر موافق و نفر سوم مخالف نباشد)

9 موافق ،4 مخالف ،2 بي طرف = 15 نفر

راه اول

P(حداقل 2 نفر موافق) =P(نفرموافق)P2(+ نفر موافق)3

□□□3 □□□□□□3 □□□

$$\frac{9\times8\times7!}{15\times14\times13\times12!}\times\frac{4\times5!}{3\times12!}+\frac{9\times8\times7\times6!}{15\times14\times13\times12!}\Rightarrow\frac{}{15\times14\times13}+\frac{}{15\times14\times13}=\frac{}{15\times14\times3}$$

!7!2 !6!3 3×9×8×4 9×8×7 !5!1

3×9×8×4+9×8×7

راه دوم

E { (موافق موافق موافق) (موافق مخالف موافق) (موافق موافق مخالف) (مخالف موافق موافق)

(موافق موافق موافق)P+(موافق مخالف موافق)P+(موافق موافق مخالف)P+(مخالف موافق موافق)P

$$=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{4}{13}+\frac{4}{15}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{13}+\frac{9}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{8}{13}=\frac{3\times9\times8\times4+9\times8\times7}{15\times14\times13}$$

15×14×13 مخرج مشترك گرفته است.

• مثال

فرض كنيم 6 كارت وجود دارد كه شماره هاي 6تا1 روي آنها نوشته شده با قرار دادن اين كارتها به ترتيبهاي مختلف شماره هاي 6 رقمي ساخته مي شود.

الف) احتمال اينكه اين عدد 6 رقمي زوج باشد.

ب) احتمال اينكه بزرگتر از 300 باشد. (در صورتي كه عدد سه رقمي باشد)

• حل

الف) www.pnu-m-s.com

$5\times4\times3\times2\times1=N_E=360$

$$P(E)=\frac{N_E}{N_S}$$

$$P(E)=\frac{360}{6!}$$

$$P(E)=\frac{1}{2}$$

ب)

$\underline{1}\times\underline{1}\times\underline{5}=5$ 300

20+5=25

$\underline{1}\times\underline{5}\times\underline{4}=20$ 310

---

*n نفر به !n طريق كنار هم مي نشينند.

*n نفر به (!n-1) طريق مي توانند دور يك ميز بنشينند.

- مثال

3 نفر به چند طريق مي توانند دور يك دايره بنشينند؟

- حل

(!3-1) طريق يعني !2

- مثال

به چند طريق مي توان 5 نفر را دور يك ميز نشاند به طوري كه دو نفر خاص هميشه كنار هم باشند؟

- حل

(4-1)!×2!=3!×2!

- مثال

به چند طريق مي توان 3 ايراني،4 آلماني و 2 انگليسي را كنار هم قرارداد به طوري كه هم مليت ها كنار هم بنشينند؟

- حل

3!×2!×4!×3!

*n شي داريم كه به k گروه تقسيم شده اند ، به طوري كه r_1 شي مثل هم ،r_2 شي مثل هم،.....

وr_k شي مثل هم باشند.تعداد كل حالات قرار گرفتنn شي به صورت زير مي باشد

$$\frac{n!}{r_1!r_2!.....r_k!}$$

- مثال

چند علامت مختلف كه هر كدام شامل 12 پرچم كه در يك خط راست قرار گرفته و شامل 4 پرچم سبز ،
5 پرچم قرمزو3پرچم سفيد مي باشد.
مي توان تهيه نمود كه پرچمهاي همرنگ يكسان هستند؟

- حل

$$\frac{12!}{4!3!5!}$$

- مثال

چند كلمه سه حرفي با حروف كلمه كتاب مي توان نوشت. به
طوريكه الف) تكرارحروف مجازنباشد. ب)
تكرارحروف مجازباشد.

- حل

الف) $P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4\times3\times2\times1$

ب) $\_\_\_ = 4^3$ ×××

444

تحلیل بیز

$$P(C^k \text{ ME}) = P(C_1)\times P(^E\text{M}C_1) + P(CP_2()C\times_k P)\times(^E P\text{M}(CE_2\text{M})C+_k.....) + P(C_k) + P(^E\text{M}C_k)$$

• مثال

فرض کنید از نیروي کار جامعه اي 40% فارغ تحصیل دبستان(ردهC_1)،50%

فارغ تحصیل دبیرستان(C_2) و 10% فارغ التحصیل دانشکده(C_3) باشند.

در بین فرغ التحصیلان دبستان 10% بیکار ، در بین دبیرستاني ها 5% بیکارند و در بین دانشکده ها 2% بیکارند. اگر از نیروي کار فردي به تصادف انتخاب شود:

الف) احتمال اینکه بیکار باشد.

ب) اگر فرد انتخاب شده بیکار باشد احتمال اینکه او فارغ التحصیل دانشکده باشد.

• حل

$P(C_1)$=%40 فارغ التحصیل دبستان ← %10 بیکار $P(E|C_1)$ =%01

$P(C_2)$=%50 فارغ التحصیل دبیرستان ← % 5 بیکار $P(E|C_2)$ =%5

$P(C_3)$=%10 فارغ التحصیل دانشکده ← %2 بیکار $P(E|C_3)$ =%2

www.neveshtani.com

E=بیکار

الف)

$$P(E) = P(E|C_1) + P(E|C_2) + P(E|C_3)$$

$$P(C_1) \times P(E|C_1) + P(C_2) \times P(E|C_2) + P(C_3) \times P(E|C_3)$$

$$0/4 \times 0/1 + 0/5 \times 0/05 + 0/1 \times 0/02 = 0/067$$

ب)

$$P(C_3|E) = P(C_3) \times P(E|C_3) = 0/02 \times 0/01 = 0/029$$

www.neveshtani.com

- مثال

فرض کنید در شهر تهران 3 کارخانه تولید یخچال به رقابت پرداخته اند. تولید کارخانه اول در هفته دو برابر تولید کارخانه دوم و تولید کارخانه سوم در هفته سه برابر تولید کارخانه اول است.مي دانيم از يخچالهاي توليدي در کارخانه اول 2% ، در کارخانه دوم 5% و در کارخانه سوم 4% معيوب هستند.همچنين همه يخچال هاي تهران از اين سه کارخانه توليد و مصرف مي شود.مطلوبست:

احتمال اينکه يخچالي که به تصادف خريداري شده و معيوب است از توليدات کارخانه اول باشد؟

- حل

کارخانه)=P2(کارخانه دوم)=a2

کارخانه)=P3(کارخانه اول)=3×a=6a2 P(اول

کارخانه)+P(کارخانه سوم)=1 P(سوم

P(کارخانه اول)+P(دوم

2a + a + 6a =9a=1 $a=\frac{1}{9}$

P(کارخانه اول)=$\frac{2}{9}$ P(کارخانه دوم)=$\frac{1}{9}$ P(کارخانه سوم)=$\frac{6}{9}$

P(M|1)=0/02 0/02 معيوب ← $\frac{2}{9}$ محصولات از کارخانه اول = 1P()(M)

P(M|2)=0/05 0/05 معيوب ← $\frac{1}{9}$ محصولات از کارخانه دوم = 2P()(M)

$P(3) = \frac{6}{9}$ محصولات از کارخانه سوم ← (M)معیوب 0/04 P(M|3)=0/04

$$P(1\mathbb{M}M) = \frac{P(1 \blacksquare M)}{P(M)} = \frac{P(1 \blacksquare M)}{P(M \blacksquare 1) + P(M \blacksquare 2) + P(M \blacksquare 3)} =$$

$$\frac{P(1) \times P(M\mathbb{M}1)}{P(1) \times P(M\mathbb{M}1) + P(2) \times P(M\mathbb{M}2) + P(3) \times P(M\mathbb{M}3)}$$

$$\frac{\frac{2}{9} \times 0/02}{\frac{2}{9} \times 0/02 + \frac{1}{9} \times 0/05 + \frac{6}{9} \times 0/04} =$$

- مثال

فرض کنید 3 جعبه موجود است در جعبه اول 10 مهره قرمز، 2 مهره سیاه و 3 مهره سفید موجود است.در جعبه دوم 5 مهره قرمز ،2 مهره سفید و 1 مهره سیاه موجود است. در جعبه سوم 4 مهره قرمز ،1 مهره سفید و 7 مهره سیاه موجود است. مهرهاي به تصادف از يكي از جعبه ها بر مي داريم:

الف) احتمال اينكه مهره انتخابي قرمز باشد.

ب) احتمال اينكه مهره انتخابي سفيد باشد.

ج) احتمال اينكه مهره انتخابي سياه باشد.

د) اگر مهره انتخاب شده قرمز باشد احتمال اينكه از جعبه دوم انتخاب شده باشد.

- حل

الف) قرمز(G)

$$P(G) = P(G \mid 1) + P(G \mid 2) + P(G \mid)3 \quad P(1) \times P(G\mathrm{M}1)$$

$$+P(2) \times (G\mathrm{M}2) + P(3) \times P(G\mathrm{M})3$$

1 10 1 5 1 4 93

$$\frac{1}{3}\times\frac{5}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{38}{72}=0/53$$

ب) سفید(S)

$$P(S)=P(S\mid 1)+P(S\mid 2)+P(S\mid 3)$$

$$P(1)\times P(S\mid 1)+P(2)\times(S\mid 2)+P(3)\times P(S\mid 3)$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{8}{45}=0/7$$

ج) سیاه(B)

د)

$$P(B)=P(B\mid 1)+P(B\mid 2)+P(B\mid 3)$$

$$P(1)\times P(B\mid 1)+P(2)\times(B\mid 2)+P(3)\times P(B\mid 3)$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=0/\overline{29}$$

$$P(2\mid G)=\frac{P(2)\times P(G\mid 2)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}}{0/53}$$

www.neveshtani.com

• مثال

25% از ماشينهاي شهر دودزا هستند. و75% از ماشينهاي شهر دودزا نيستن د. 5% از ماشينهايي كه دودزا هستندداراي اشكال فني نيستند و 25% ازماشينهايي كه دودزا نيستند داراي اشكال فني نيستند.ماشيني به تصادفانتخاب مي شود:

الف) احتمال اينكه داراي اشكال فني نباشد چقدر است؟

ب) اگر بدانيم ماشين انتخاب شده داراي اشكال فني نيست. چقدراحتمال دارد كه دودزا باشد؟

• حل

الف)

E داراي اشكال فني

نباشد.

C_1 دودزا باشد.

C_2 دودزا نباشد.

$$P(E) = P(E \mid C_1) + P(E \mid C_2)\, P(C_1) \times P(E \mid C_1)$$

$$+ P(C_2) \times P(E \mid C_2)$$

$$P(E) = 0/25 \times 0/05 + 0/75 \times 0/25$$

$$P(E) = 0/2$$

ب)

$$P(C_1 \mid E) = \frac{P(C_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C_1) \times P(E \mid C_1)}{P(E)} \Rightarrow \frac{0/25 \times 0/05}{0/2} = 0/06$$

متغير تصادفي (X) $\left\{ \begin{array}{l} \text{گسسته} \\ \text{پيوسته} \end{array} \right.$

متغير تصادفي گسسته

تابع احتمال گسسته(P(X))

تابع احتمال تجمعي $(F(x))^X$ $\Leftarrow$ $F(x) = P(X \leq x)$

تابع احتمال تجمعي برابر است با احتمال هر مشاهده + احتمال مشاهدات قبلي

www.neveshtani.com

- مثال

در خانواده سه فرزندي اگر x تعداد پسران باشد.

الف) تابع احتمال x ب) تابع تجمعي x

- حل

X	P(X)	F(x)
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	8/8
	1	

جدول توزيع احتمال X((P(X)

$$P(X=0)=p(\text{د د د})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P\{(\text{د پ د}) (\text{پ د د}) (\text{د د پ})\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=P\{(\text{پ د پ}) (\text{پ پ د}) (\text{د پ پ})\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=P\{(\text{پ پ پ})\} = \frac{1}{8}$$

- مثال

اگر جدول توزیع احتمال متغیر تصادفي X به صورت زیر باشد.

الف)مقدار a را بیابید.

ب)میانگین و واریانس x را بدست آورید.

- حل

X	f(x)
1	a^2
2	2a
3	3
	4
4	1
	4
	1

$$a^2 + 2a + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

الف)

$a^2 + 2a + 1 = 1$ a=0 ق

$a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a + 2) = 0$ a=-2 غ ق ق

میانگین و واریانس متغیر گسسته

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \rightarrow \bar{X} = \sum_i f P(x) \times X_i$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{} \rightarrow \delta^2 = \sum_i f P(x) \times (X - \bar{X})^2 \; n$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n}} \rightarrow \delta = \sqrt{\sum_i f P(x) \times X^2 - \bar{X}^2}$$

ب)

X	f(x)	x×f(x)	X²×f(x)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	3	9	27
	4	4	14
4	1	4	16
	4	4	4
		13	43
		14	4

$$\delta^2 = \sum p(x_i)(x_i^2) - \bar{X}^2$$

$$\delta^2 = \frac{43}{4} - (\frac{13}{4})^2$$

$$\delta^2 = \frac{3}{16}$$

- مثال

شخصي 2سكه سالم را پرتاب مي كند اگر يك شير بيايد يك تومان و اگر دو شير بيا يد دو تومان بگيرد. اگر شير ظاهر نشود 5 تومان مي دهد. اميد رياضي(ميانگين) اين شخص را حساب كنيد.

- حل

X(د)	P(x)	X×P(x)
1	1	1
	2	2
2	1	2
	4	4
-5	1	-5
	4	4
		-1
		4

P(X=1)= P(يك بار شير)=P{ (خ) (ش خ) } $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$ (ش) = =

P(X=2)= P(دو بار شير)=P{ (ش ش) } $=\frac{1}{4}$

P(X=-5)= P(اصلا شير نيايد)=P{ (خ خ) } $=\frac{1}{4}$

- مثال

فرض كنيد 2 ظرف داريم كه درون هر كدام 4 مهره با شماره هاي 1،2،3،4 وجود دارد.

از هر ظرف يك مهره بيرون مي آوريم.متغير تصا دفي x را قدر مطلق تفاضل شماره مهره هاي خارج شده در نظر مي گيريم . ميانگين و واريانس x را بدست آوريد؟

- حل

x قدر مطلق تفاضل شماره مهره ها

$$P(x=0)= p\{(1،1)\ (2،2)\ (3،3)\ (4،4)\} = \frac{4}{4^2}\ \frac{4}{16}\ \frac{1}{4} = = =$$

$$P(x=1)=p\{(1،2)\ (2،1)\ (3،2)\ (2،3)\ (3،4)\ (4،3)\} = \frac{6}{16}$$

$$P(x=2)= p\{(1،3)\ (3،1)\ (2،4)\ (4،2)\} = \frac{4}{16}$$

$$P(x=3)= p\{(1،4)\ (4،1)\} = \frac{2}{16}$$

X	P(X)	XP(X)	$x^2P(X)$
0	4/16	0	0
1	6/16	6/16	6/16
2	4/16	8/16	16/16

3	16 2	16 6	16 8
	16	16	16
	1	20	40
		16	16

—

$X = \sum xP(x)$

$40 - 20^2$

$\overline{\quad} - \overline{\quad} = 0/94$

16×16

دو جمله اي

توزيعهاي احتمال گسسته

فوق هندسي

پواسن

www.pnu-m-s.com

توزيع احتمال دو جمله اي

فرمول

n_x

$$P(X = x) = \square\square\square x \square\square\square P\,(1 - P)_{n-x}$$

* آزمایشها از هم مستقل
* دو حالت پیروزي و شکست
* احتمال پیروزي=P
* احتمال شکست1=q-P
* n تعداد آزمایشها
* x تعداد پیروزیها

- مثال

در آزمایش پرتاب سه سکه احتمال اینکه 2 تا شیر داشته باشیم ؟شانس شیر آمدن $\frac{1}{3}$

- حل

$$P = \frac{1}{3}$$

$$n = 3$$

$$x = 2$$

$$P(X = 2) = \frac{\square 3 \square\square 1 \square^{2} \square}{\square 2 \square\square 2 \square} \square 1 - \frac{1}{3} \square^{3-2} = \frac{3!}{2!1} \square \frac{1}{3} \square^{2} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2!}{2!} \square \frac{1}{3} \square^{2} \square \frac{2}{3} \square = 3 \square \frac{1}{3} \square^{2} \square \frac{2}{3} \square$$

E= {(ش خ ش) (ش ش خ) (خ ش ش)}

P(E)= P (ش خ ش)+P (ش ش خ)+P (خ ش ش)

$$\frac{1}{3}^{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}^{2} \quad \frac{1}{3}^{2} \quad \frac{2}{3} \qquad \_ \quad \_$$

$$\times + \times + \times = 3 \times \square\square^{1} \square\square^{2} \square\square^{2} \square\square$$

$$\square 3 \square \square 3 \square$$

• مثال

شخصي 0/4 اوقات تيرش به هدف اصابت مي كند. اگر او 15 تير به سوي هدف شليك كند.

الف) احتمال اينكه هيچ تيري به هدف نزند.

ب) احتمال اينكه دقيقا سه تير به هدف بزند.

ج) احتمال اينكه حداقل 13 تير به هدف بزند.

د) احتمال اينكه حداكثر 2 تير به هدف بزند.

• حل

(الف n =15 x =0 p =0/4

$$P(X=0)=\binom{15}{0}(0/4)^{0}(1-0/4)^{15-0}\Rightarrow\frac{15!}{0!15!}(0/6)^{15}\Rightarrow P(X=0)=0/6^{15}$$

از جدول بدست مي آيد كه پيوست جزوه است از اين به بعد براي مشخص شدن اينكه از جدول استفاده شده از اين علامت استفاده مي كنيم ♠

♠$P(X=0)=P(X\le 0)=0/0005$

(ب n =15 x =3 p =0/4

$$P(X=3)=\binom{15}{3}(0/4)^{3}(1-0/4)^{15-3}=$$

$$\frac{15!}{3!12}(0/4)^{3}(0/6)^{12}=\frac{15\times14\times13\times12}{3\times4\times12!}(0/4)^{3}(0/6)^{12}\Rightarrow5\times7\times13\times(0/4)^{3}(0/6)^{12}$$

!

♠$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 2) = 0/0905 - 0/0271 = 0/0634$

ج)

$x \ge 13$ P=0/4 n=15

$P(X \ge 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + P(x = 15)$

□□□□1513□□□□$(0/4)^{13}(1 - 0/4)^{15-13}$ +□□□□1415□□□□$(0/4)^{14}(1 - 0/4)^{15-14}$ +□□□□1515□□□□$(0/4)^{15}(1 - 0/4)^{15-15}$

♠$P(X \ge 13) = 1 - P(X \le 12) = 1 - 0/9997 = 0/0003$

د) $x \le 2$ n =15 p =0/4

$P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(x = 0)$

□□□□152 □□□□$(0/4)^{2}(1 - 0/4)^{15-2}$ +□□□□115 □□□□$(0/4)^{1}(1 - 0/4)^{15-1}$ +□□□□150 □□□□$(0/4)^{0}(1 - 0/4)^{15-0}$

♠$P(X \le 2) = 0/0271$

• مثال

www.pnu-m-s.com
وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.m-sanati.ir

يك آزمون شامل 8 سؤال3 گزينه اي كه تنها يك گزينه درست است.

الف) احتمال اينكه شخصي دقيقا به پنج سؤال پاسخ درست دهد.

ب) احتمال اينكه به دو سؤال پاسخ غلط دهد.

ج) احتمال اينكه به هفت سؤال پاسخ درست دهد.

• حل

الف)

احتمال صحيح جواب دادن $P=\frac{1}{3}$ $n=2$ $x=5$

$$P(X=5)=\binom{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-5}$$

---

[2] $P(X\geq 7)=\binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-7}+P(X\geq 8)=\binom{8}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{8-}$

ب)

احتمال غلط جواب دادن $P=\frac{2}{3}$ n =8 x=2

$8 \quad 2^2 \quad 2_{8-2}$

ج) $P(X=2)=2 \quad 3 \quad 1-3$

$P=\frac{1}{3}$ n =8 $x\geq 7$

$P(x\geq 7)=P(x=7)+P(x=8)$

توزيع فوق هندسي

فرمول

$$P(X=x)=\frac{k \quad N-K \quad x \quad n-x \quad N \quad n}{}$$

*K پيروزي

*N-K شكست

*n تعداد نمونه

*x تعداد پيروزي در نمونه

* آزمايشها از هم مستقل نيستند.

*استخراج n بدون جايگذاري است.

• مثال

www.neveshtani.com

5نفر زن و 6 نفر مرد براي شغلي تقاضا كردند.امكان استخدام براي 5 نفر وجود دارد. احتمال انتخاب 5 نفر را در حالات زير بيابيد.

الف)3 زن و 2 مرد ب)حداقل 4 مرد

• حل

الف)

$$P(E) = \frac{N_E}{N_S} = \frac{\binom{3}{2}\binom{6}{3}}{\binom{11}{5}}$$

ب)

P(مرد4حداقل)= $P(x^{\geq} 4) = P(x^{=} 4) + P(x^{=})5$

□6□□5□ □6□

□□ □□□□ □□ □□ □□

$P(E) = \_\_N_{ES} =$ □4□11□□1□□

+□□115□□

N

□□□5 □□□□□□5 □□□

در جعبه اي 2 مهره سفيد ، 3 مهره سياه و 4 مهره قرمز موجود است3. مهره با جايگذاري انتخاب مي كنيم.

الف) احتمال اينكه 2 مهره قرمز داشته باشيم.

ب) احتمال اينكه 2 مهره سياه داشته باشيم.

• حل

الف)

$P=\frac{4}{9}$ احتمال قرمز بودن x= 2n=3

$$P(x=2)=\frac{3\,4^{2}\,4^{3-2}}{2\,9\,9}$$

ب)

سياه بودن = پيروزي $P=\frac{3}{9}$ احتمال سياه بودن

x= 2n=3

$$P(x=2)=\frac{32\,3^{2}\,3^{3-2}}{9\,1-9}$$

• مثال

تقريب فوق هندسي به دو جمله اي

در صورتي كه حجم جامعه نسبت به حجم نمونه بزرگ باشد . استخراج بدون جايگذاري و با جايگذاري به طور تقريبي معادل مي شود.يعني مي توان مسأله را به جاي حل فوق هندسي با استفاده از دو جمله اي حل نمود.

ميانگين و واريانس توزيـع دو جمله اي

$$\overline{X} = np$$

$$\delta_2 = np(1-p)$$

ميانگين و واريانس توزيـع فوق هندسي

$$\overline{\quad} = n \times \frac{KX}{\quad N}$$

$$\delta^2 = n \times \frac{K}{N} \times \frac{N-K}{N}$$

به طور كلي در مسائل احتمال آزمايش هايي كه از هم مستقل باشند(آزمايش هاي مربوط به پرتاب سكه و تاس) و استخراج هاي با جايگذاري را از توزيع دو جمله اي مي توان حل كرد و آزمايش هايي كه به هم وابسته باشند(استخراج بدون جايگذاري) را مي توان از توزيع فوق هندسي حل نمود.

در يك منطقه كه 1000 نفر جمعيت دارد. تعداد 100 نفر مخالف با انتخاب شدن شخص معيني هستند.

يك نمونه 10 تائي به تصادف انتخاب مي كنيم.

الف) 3نفر مخالف برنامه باشند . ب) حداقل 9 نفر موافق برنامه باشد.

• حل

الف)

$\frac{100}{1000} = 0/1$ احتمال مخالف بودن $x=$ $3n=10$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0/1)^{3} (1- 0/1)^{10-3}$$

$$\overline{X} = 10\times0/1 = 1$$

$$\delta^2 = 10\times0/1\times0/^3 = 0/^4$$

ب)

[3] $X = 10\times0/9 =$

[4] $\delta^2 = 10\times0/9\times0/1 = 0/9$

• مثال

$\frac{900}{1000} = 0/9$ احتمال موافق بودن $x \leq 9$ **n=10**

$P(x \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) =$

$\binom{10}{9}(0/9)^{9}(1 - 0/9)^{10-9} + \binom{10}{10}(0/9)^{10}(1 - 0/9)^{10-10}$

توزيع پواسن

فرمول

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

* λ متوسط تعداد وقايع در فاصله زماني يا مكاني مشخص
* x تعداد وقايع در فاصله زماني يا مكاني مشخص

* $X = \lambda$
* $\delta^2 = \lambda$
* از متوسط بودن مي شود فهميد پواسن است.

• مثال

به طور متوسط در هر توپ پارچه 3 زدگي وجود دارد . احتمال اينكه در يك توپ پارچه معين دقيقا 5 زدگي وجود داشته باشد.

- حل

$\lambda = 3$ $x=5$

$$P(x=)5 = \frac{e^{-3}3^5}{5!}$$

♠$P(X = 5) = P(X \le 5) - P(X \le 4) \Rightarrow 0/9161 - 0/8153 = 0/1008$

فرض کنید در هر 100 مترپارچه به طور متوسط 3 زدگي وجود داشته باشد. احتمال اینکه در 130 متر از آن 3 زدگي باشد چقدر است؟

- حل

زدگي	متر
3	100

$$130 \quad \lambda = \frac{3\times130}{100} = 3/9$$

$$P(x=)3 = \frac{e^{-3/9}3/9^3}{3!}$$

♠$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le)2 \Rightarrow 0/4335 - 0/2381 = 0/1954$

www.neveshtani.com

• مثال

تقريب دو جمله اي به پواسن

در صورتي كه در توزيع دو جمله اي n خيلي زياد و p خيلي كم باشد . به طوري كه حاصلضرب n و p داراي حاصلضرب ثابتي باشد. توزيع دو جمله را به توزيع پواسن تقريب مي زنيم.

$\lambda = np$

• مثال

فرض كنيد شخصي 500 بار به هدفي شليك مي كند و احتمال زدن به هدف براي او 0/01باشد. مطلوبست احتمال اينكه دقيقا 2 بار به هدف زده باشد؟

• حل

چون =500n زياد و0p=/01 كم است توزيع دو جمله اي را به پواسن تقريب مي زنيم.

$\lambda = np$ $\lambda =$
$500 \times 0/01$

$\lambda = 5$

$$P(x =)2 = \frac{e^{-5}\,5^{2}}{2!}$$

• مثال

فرض كنيد ميانگين تعداد تلفن هايي كه به يك شركت مي شود. 120 در ساعت است. مطلوبست احتمال اينكه در يك فاصله زماني 30 دقيقه حداقل يك تلفن زده شود؟

- حل

60 120

$$P(X \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{e^{-60}(60)^0}{0!}$$

20 λ

$$\lambda = \frac{120 \times 30}{60} = 60$$

3% از ساعت هاي ساخت كارخانه A معيوب است. احتمال اينكه در يك بسته 120 تائي از اين ساعت ها خرابي وجود نداشته باشد چقدر است؟

- حل

$\lambda = np$

$\lambda = 120 \times \%3 = 3/6$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3/6}\, 3/6^0}{0!}$$

- مثال

80% لامپ هاي توليدي يك كارخانه سالم مي باشد . يك نمونه 8 تائي از لامپ ها را به طور تصادف انتخاب مي كنيم.(با جايگذاري) مطلوبست محاسبه

الف) حداكثر 3 لامپ سالم ب)حداقل 2 لامپ معيوب

- حل

الف)

$$P(X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) =$$

• مثال

$\binom{8}{3}(0/8)^{3}(1-0/8)^{8-3}+\binom{8}{2}(0/8)^{2}(1-0/8)^{8-2}+\binom{8}{1}(0/8)^{1}(1-0/8)^{8-1}+\binom{8}{0}(0/8)^{0}(1-0/8)^{8-0}$

♠$P(X \leq 3) = ?$

ب)

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) + P(X = 0)$

$\binom{8}{1}(0/2)^{1}(1-0/2)^{8-1}+\binom{8}{0}(0/2)^{0}(1-0/2)^{8-0}$

♠$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - ?$

نویسنده:
ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت , دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.neveshtani.com

بخش سوم

توزیع احتمال x وy (توزیع توام x وy) P(x,y)

• مثال

در خانواده سه فرزندي اگر x تعداد فرزندان پسر و y تعداد فرزندان دختر باشد. مطلوبست :

الف) توزیع احتمال توام x وy

ب) توزیع احتمال x (توزیع حاشیه اي x)

ج) توزیع احتمال y (توزیع حاشیه اي y)

• حل

الف)

x / y	0	1	2	3	
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

ب) جدول احتمال x

x	p(x)
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

8

ج) جدول احتمال y

y	p(y)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

• مثال

فرض کنید x و y توزیع توام زیر را داشته باشد.

الف) py ، میانگین و واریانس y

ب)

احتمال(y=20|x=)40p

ج) احتمال (y|x=)20p

x / y	20	40	60	80	
20	0/04	0/08	0/08	0/05	0/25
40	0/12	0/24	0/24	0/15	0/75
	0/16	0/32	0/32	0/2	1

• حل

الف)

y	p(y)	y p(y)	y^2 p(y)
20	0/25	5	100
40	0/[5]	30	1200

[5] $\delta^2 y = \sum y^2 p(y) - y^2 = 1300 - (35)^2 =$

35	1300

$\bar{y} = \sum yp(y) = 35$

ب)

$$P(y = 20 \mid x = 40) = \frac{P(y = 20, x = 40)}{P(x = 40)} = \frac{0/08}{0/32} = 0/25$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ج)

y	p(y|x)=20
20	0/25
40	0/75

$$P(y = 20 \mid x = 20) = \frac{P(y = 20, x = 20)}{P(x = 20)} = \frac{0/04}{0/16} = 0/25$$

$$P(y = 40 \mid x = 20) = \frac{P(y = 40, x = 20)}{P(x = 20)} = \frac{0/12}{0/16} = 0/75$$

- مثال

فرض کنید x و y توزیع توام زیر را داشته باشد؛$R=x\times y$ مي باشد.

الف) توزیع احتمال R

ب) میانگین و واریانس R

- حل

P(xy)

y \ x	0	1	2
0	0/1	0/1	0
2	0/1	0/4	0/1
4	0	0/1	0/1

R=x×y

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
2	0	2	4
4	0	4	8

توزیع احتمال R

R	p(R)	R p(R)	R^2 p(R)
0	0/3	2	0

2	0/4	0/8	1/.6
4	0/2	0/8	3/.2
8	0/1	0/8	6/.4
	1	2/.4	11/.2

$$\bar{x} = \sum xP(x)\ R$$

$$= \sum RP(R)$$

$$\delta_R^2 = \sum R^2 P(R) - \bar{R}^2 \quad \delta_{R^2} = 11/2$$

$$- (2/4)^2 \Rightarrow 5/44$$

- مثال

تابع احتمال زیر مفروض است. میانگین و واریانس x را حساب کنید.

x	-2	1	3	5
P(x)	12	0/4	0/3	0/1
xP(x)	0/4	0/4	0/9	0/5
$x^2 P(x)$	0/8	0/4	2/.7	2/.5

- حل

$$\bar{x} = \sum xP(x) \quad \delta^2 = \sum x^2 P(x) - \bar{x}^2 \quad \delta = 6/4 - (1/4)^2 = 1/6$$

y

ضريب همبستگي

$$-1 \le P \le 1$$

$$P(x.y) = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y}$$

- مثال

جدول توزيع احتمال x,y به صورت زير داده شده است . مطلوبست محاسبه ضريب همبستگي

y \ x	-1	0	1	
0	4/12	0	1/12	5/12
1	0	2/12	0	2/12
2	4/12	0	1/12	5/12
	8/12	2/12	2/12	1

- حل

x	p(x)	x p(x)	x² p(x)
-1	8	-8	8
	12	12	12
0	0	0	0
1	2	2	2
	12	12	12
		-6	10
		12	12

$$\delta_{x^2} = \frac{10}{12} - \frac{-6}{12} = 0/58$$

$$x = \frac{-6}{12}$$

$$\delta_x = 0/76$$

y	p(y)	y p(y)	y² p(y)
0	5	0	0
	12		
1	2	2	2
	12	12	12
2	5	10	20
	12	12	12
		12	22
		12	12

$$z = \frac{12}{12} = 1$$

$$\delta_{y^2} = \frac{22}{12} - (\ )1^2 = 0/83$$

$$\delta_y = 0/91$$

$$P(x.y) = \frac{\frac{-6}{12} - \frac{-6}{12} \times 1}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{0}{0/76 \times 0/91} = \frac{xy - x \times y}{0/76 \times 0/91}$$

جدول مقادیر R=x.y

y \ x	-1
0	0
1	-1
2	-2

R	p{R}	R p(R)
-2	4	-8
	12	12
-1	0	0
0	7	0
	12	
1	0	0
2	1	2
	12	12
		-6
		12

www.neveshtani.com

- مثال

جدول توزیع احتمال x,y به صورت زیر داده شده است . مطلوبست محاسبه ضریب همبستگی

y \ x	-1	0	1	
1	0	1/8	1/8	2/8
2	0	1/8	2/8	4/8
3	0	1/8	1/8	2/8
	1/8	3/8	4/8	1

- حل

x	p(x)	x p(x)	x^2 p(x)
-1	1/8	-1/8	1/8
0	3/8	0	0
1	4/8	4/8	4/8
		3/8	5/8

$$x = \frac{3}{8}$$

$$\delta_{x^2} = \frac{5}{8} - (\frac{3}{8})^2 = 0/485$$

$$\delta_x = 0/69$$

y	p(y)	y p(y)	y^2 p(y)
1	2	2	2
	8	8	8
2	4	8	16
	8	8	8
3	2	6	18
	8	8	8
		16	36
		8	8

$$\bar{y} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\delta_{y^2} = 4/5 - (2)^2 = 0/5$$

$$\delta_y = \sqrt{0/5} = 0/70$$

$$P(x.y) = \frac{xy - \bar{x} \times \bar{y}}{\delta_x \times \delta_y} = \frac{\frac{6}{8} - \frac{3}{8} \times 2}{0/69 \times 0/7} = \frac{0}{0/69 \times 0/7}$$

=

جدول مقادیر R=x.y

x / y	-1	(
1	-1	(
2	-2	(
3	-3	(

R	p{R}	R p(R)
-3	0	0
-2	1	-2
	8	8
-1	0	0
0	3	0
	8	
1	1	1
	8	8
2	2	4
	8	8
3	1	3
	8	8
	1	6
		8

www.neveshtani.com

توزيعهاي احتمال پيوسته

توزيع نرمال

$$P(X = x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2}$$

M ميانگين و δ انحراف معيار

$$-\infty < x < +\infty$$

$$P(X = 3) = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\delta}\right)^2} dx$$

حل اين انتگرال مشكل است.

توزيع نرمال استاندارد

با استفاده از تغيير متغير $Z = \frac{X - M}{\delta}$ توزيع نرمال را تبديل به نرمال استاندارد مي كنيم.

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{\quad}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

2π

$$\geq 5) = \int^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ }}.e^{-\frac{1}{2}} \; {}^{Z}_{5} P(Z.dz \quad 2\pi$$

جواب اين انتگرال از جدول نرمال استاندارد بدست مي آوريم.

- مثال

در صورتي كه متغير Z داراي توزيع نرمال باشد؛ مقادير زير را حساب كنيد؟

- حل

♠ به وسيله جدول محاسبه مي كنيم.

$P(Z\langle -)1 = 0/1587$ $\qquad$ $P(Z\langle 2/20) = 0/9861$

$P(Z\langle 1/25) = 0/8944$ $\qquad$ $P(Z\rangle 1/25) = 1 - P(Z \leq 1/25) = 1 - 0/8944 = 0/1056$

$$P(1/5\langle Z\langle 2) = P(Z\langle 2/00) - P(Z\langle 1/50) = 0/9772 - 0/9332 = 0/044$$

احتمال اينكه يك متغير پيوسته برابر با عدد ثابت باشد صفراست.

P(X=C)=0

C مقدارثابت ، X متغير پيوسته

- مثال

$$(|Z|\langle 2)$$

- حل

$$\spadesuit P(-2\langle Z\langle 2) = P(Z\langle 2) - P(Z\langle -)2 \Rightarrow 0/9772 - 0/0228 = 0/9544$$

- مثال

اگرX متغيري نرمال با ميانگين =100M و انحراف معيار ^{5} =δ باشد. احتمال $P(X110^{)}$ چقدر است؟

- حل

$$\spadesuit P(X\rangle 110) = P(\frac{X - M}{\delta} \rangle \frac{110 - 100}{5}) = P(Z\rangle 2) = 1 - P(Z \leq)2 = 1 - 0/8869 = 0/1131$$

پيچي به تصادف از خط توليد برداشته مي شود. داراي طولي برابرX است. كه به طور نرمال بر حسب ميلي متر با ميانگين 78M=/3 و انحراف معيار $\delta=1/^{4}$ توزيع شده است. اگر قرار باشد پيچهاي بلندتر از 08 ميلي متردور ريخته شود چه نسبتي از محصول ضايع مي شود؟

- حل

$$P(X\rangle 80) = P(\frac{X-M}{\delta}\rangle \frac{80-78/3}{1/4}) = P(Z\rangle 1/21) = 1-P(Z\le 1/21) = 1-0/8869 = 0/1131$$

- مثال

دستگاه پر كننده شيشه هاي نوشابه به طوري تنظيم شده كه 952 ميلي ليتر نوشابه را به داخل شيشه مي ريزند. اين ميزان نوشابه داراي توزيع نرمال با ميانگين 952 ميلي ليتر و انحراف معيار 4 ميلي ليتراست.

مطلوبست:

الف) احتمال اينكه شيشه اي بين 952 تا 956 ميلي ليتر نوشابه داشته باشد.

ب) چند درصد از بطري ها حاوي 948 تا 956 ميلي ليتر نوشابه هستند.

- حل

الف)

$$P(952\langle X\langle 956) = P(\frac{952-952}{4}\langle \frac{X-M}{\delta}\langle \frac{956-952}{4})$$

$$P(0\langle Z\langle 1) = P(Z\langle 1) - P(Z\langle 0) \Rightarrow 0/8413 - 0/5 = 0/3413$$

ب)

$$P(948\langle X\langle 956) = P(\frac{948-952}{4}\langle \frac{X-M}{\delta}\langle \frac{956-952}{4})$$

• مثال

♠ 4 δ 4

$P(-1\langle Z\langle 1) = P(Z\langle 1) - P(Z\langle -)1 \Rightarrow 0/8413 - 0/1587 = 0/6826$

استفاده معکوس از جدول نرمال استاندارد

• مثال

تقاضاي هفتگي براي بنزين در پمپ بنزين به صورت نرمال با ميانگين 250000 ليتر و انحراف معيار 80000 ليتر توزيع شده است. چه ميزان ليتر بنزين درهفته بايد در پمپ بنزين وجود داشته باشد كه مطمئن شويم كه احتمال تمام شدن بنزين فقط 2% است؟

• حل

x تمام شدن بنزين X تقاضاي هفتگي

000M=/250

δ=80/000

$P(x) = 0/02$

$P(X\langle a) = 0/02 \quad P(X - M \rangle a -$ 250/000 $= 0/02$

δ 80/000

$P(Z\rangle Z_0) = 0/02 \Rightarrow 1 - P(Z\langle Z_0) = 0/02 \Rightarrow P(Z\langle Z_0) = 0/98 \Rightarrow Z_0 = 2/06$

$\frac{a - 250/000}{80/000} = 2/06 \Rightarrow a - 250/000 = 80/000 \times 2/06 \Rightarrow a = 414/800 \cong 415$

www.neveshtani.com

يك دستگاه اتوماتيك پيچ هايي توليد مي كند كه قطرآن داراي توزيع نرمال است. با انحراف معيار 0/5 ميلي ليتر دستگاه را بايد بر روي چه ميانگيني تنظيم كرد كه فقط 4% پيچها داراي قطري معادل 25 ميلي ليتر يا كمتر باشد؟

- حل

X قطر پيچ

δ=0/5

M=?

$$P(X \le 25) = 0/04$$

$$P\left(\frac{X-M}{\delta} \le \frac{25-M}{0/5}\right) = 0/04$$

$$P(Z \le Z_0) = 0/04 \Rightarrow Z^0 = -1/75 \Rightarrow \frac{25-M}{0/5} = -1/75$$

$$25-M = 0/5\times 1/75 \Rightarrow M = 25/875 \cong 26$$

- مثال

اگر توزيع قد افراد جامعه داراي توزيع نرمال با ميانگين 170 و انحراف معيار 5 باشد. آنگاه 2/5% بلندترين افراد جامعه حداقل داراي چه قدي هستند؟

- حل

$$M = 170$$

• مثال

$\delta = 5\ x =$

%2/5

$P(x) = \%2/5$

$P(X \geq a) = 2/5$

$$P\left[\frac{X - M}{\delta} \geq \frac{a-170}{5}\right] = 2/5$$

$P(Z \geq Z_0) = 2/5 \Rightarrow 1 - P(Z < Z_0) = 2/5 \Rightarrow P(Z < Z_0) = 0/975 \Rightarrow Z_0 = 1/96$

$$\frac{a-170}{5} = 1/96 \Rightarrow a - 170 = 1/96 \times 5 \Rightarrow a = 179/8$$

تقريب توزيع دوجمله اي به نرمال

در صورتيكه $n \times p5$ باشد؛ توزيع دوجمله اي را به نرمال تقريب مي زنيم.

ميانگين دو جمله اي $M = np$

واريانس $\delta_2 = np(1 - p)$

$Z\sqrt{\frac{X - np}{np(1-p)}}$ داراي توزيع نرمال استاندارد است و X= نرمال

• مثال

دريك بررسي از اهالي يك منطقه 4% افراد بالغ معتاد به سيگار هستند ، احتمال اينكه در يك نمونه 25 تائي حداكثر 5 نفر معتاد به سيگارباشند چقدر است؟

• حل n=25

p=0/4

$n \times p = 25 \times 0/4 = 10 \rangle 5$

$$P(X \le 5) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{25 - 50}{\sqrt{104 \times 0/6}}\right)$$

$$P(Z \le \frac{-5}{\sqrt{2}}) = P(Z \le -2/04) = 0/0207$$

عمرنوعي دستگاه توزيع نرمال با ميانگين 20000 و انحراف معيار 2500 ساعت است.

الف) احتمال اينكه يك دستگاه خريداري شده بيش از 26000 ساعت عمر كند چقدر است؟

ب) اگر مهندسين به خواهند با ثابت نگه داشتن انحراف معيار ميانگين عمر را بالا ببرند به طوري كه 67% دستگاهها حداقل 20000 ساعت كار كنند. مهندسين بايد به چه ميانگيني دست يابند؟

• حل

$$P(X \ge 20000) = \%67$$

$$P\left(\frac{X - M}{\delta} \ge \frac{20000 - M}{2500}\right) = 0/67$$

$$P(\quad \ge \quad_0) = 0/67$$

$$1 - P(Z \le Z_0) = 0/67 \qquad Z \qquad Z$$

$$P(Z \langle Z_0) = 1 - 0/67$$

$$P(Z \langle Z_0) = 0/33 \Rightarrow Z_0 = -0/44$$

$$\frac{20000 - M}{2500} = -0/44$$

$$20000 - M = -0/44 \times 2500 \Rightarrow 21/100$$

• مثال

فاصله اطمينان(برآورد فاصله اي)

فاصله اطمينان براي ميانگين جامعه

* n تعداد نمونه
* x ميانگين نمونه
* δ^2 واريانس

* M ميانگين جامعه
* δ^2 واريانس جامعه

$$E = (\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = M$$

$$Var = (\overline{X}) = \frac{\delta^2}{n}$$

$$Z = \frac{\overline{X} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$$

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\overline{X} - M}{\sqrt{n}}\right] Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$1-\delta$

$$-Z_{1-\alpha_2}\frac{\delta}{\sqrt{n}}\langle\overline{X}-M\langle\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{1-\alpha_2}$$

$$-\overline{X}-Z_{\alpha_{12}}\langle-M\langle-\overline{X}+\frac{\delta}{\sqrt{n}}Z_{\alpha_{1-2}}$$

$$\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle M \langle \overline{X} + \frac{\delta}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$ ← فاصله اطمينان $\%(1-\alpha)$ ✓

حالتي كه واريانس جامعه معلوم است

$$\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \square M \square \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

حالتي كه واريانس جامعه مجهول است

الف) $n \square 30$

$$\overline{X} - Z_{1-\alpha} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \langle M \langle \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ب) $n \langle 30$

$$\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \langle M \langle \overline{X} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_{(d)}}{\sqrt{n}}$$

d=n-1 درجه آزادي

پس به طور كلي در حالتي كه واريانس جامعه مجهول و حجم نمونه كمتر از 30 باشد

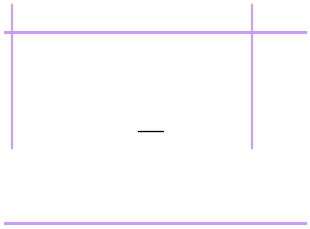
توزيع Z به توزيع t با درجه آزادي d=n-1 تبديل مي شود.

- مثال

يك توليد كننده لامپ ، لامپي توليد مي كند كه انحراف معيار طول آنها 40 ساعت است. اگر يك نمونه تصادفي 36 تائي داراي متوسط عمر 870 ساعت باشد. يك فاصله اطمينان 95% براي متوسط عمر تمام لامپ هاي توليدي اين كارخانه به دست آوريد؟

- حل

n=36



$\bar{X} = 870$

$\delta = 40$

$95\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/05$

اطمينان ⟵

$Z_0 = Z = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}} = Z_{/975} = 1/96$

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$870 - 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}} < M < 870 + 1/96 \frac{40}{\sqrt{36}}$$

$$856/94 < M < 883/06$$

www.neveshtani.com

- مثال

اگر طول قد کارمندان يك اداره داراي توزيع نرمال باشد. يك نمونه 5 تائي از كارمندان انتخاب شده بهطوريكه ميانگين نمونه 170 و واريانس نمونه 62/5 مي باش د. مطلوبست محاسبه فاصله اطمينان 99% برايميانگين جامعه؟

- حل

n=5

$\bar{X} = 170$

$\delta^2 = 62/5$

در اين جامعه مجهول ، $n \square 30$ بايد آماره Z تبديل به t شود.

$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/01$

$t_{1-\frac{0/01}{2}(5-1)} = t_{0(4)/995} = 4/60$

$\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left(M \left(\frac{\delta_{(d)}}{\sqrt{n}} \right. \right. \quad \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_{(d)}}{\sqrt{n}}$

$$170 - \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{62/5}}{\sqrt{5}}$$

$$4/6 < M < 170 + 4/6$$

$$153/49 < M < 186/5$$

فاصله اطمينان براي اختلاف ميانگين دو جامعه $(M_1 - M_2)$

واريانس جامعه معلوم

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{\alpha_{1-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\delta_2 \delta_2}{n_1 \quad n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{\alpha_{1-2}} \delta_{12} + \delta_{22} \sqrt{\frac{\quad}{n_1 \quad n_2}}$$

واريانس جامعه مجهول

الف) $n_1, n_2 \geq 30$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - Z_{\alpha_{1-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\delta_2 \delta_2}{n_1 \quad n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + Z_{\alpha_{1-2}} \sqrt{\frac{\quad}{n_1 \quad n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}} < M_1 - M_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

درجه آزادي $d_2 = n_1 + n_2 - 2$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - ZS_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

واريانس جامعه مجهول و مساوي $(\delta_1^2 = \delta_2^2)$

الف) $n_1, n_2 \geq 30$

$$(M_1 - M_2) \in \overline{X_1} - \overline{X_2} + ZS_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - tS_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq (M_1 - M_2) \leq \overline{X_1} - \overline{X_2} + tS_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

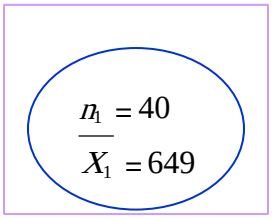
$$S_p = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$ درجه آزادي

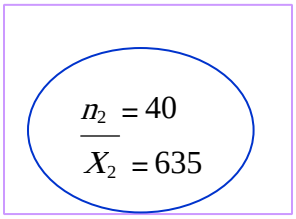
www.neveshtani.com

• مثال

دو شركت A وB لامپ روشنايي توليد مي كنند كه به ترتيب داراي انحراف معيارهاي 27 و 31 ساعت است. يك نمونه تصادفي 40 تائي از لامپهاي توليدي هر شركت انتخاب مي كنيم و به ترتيب متوسط طول عمر لامپ ها براي اين دو نمونه را 649 و 635 به دست مي آوريم. مطلوبست فاصله اطمينان 96% براي اختلاف متوسط طول عمر لامپ هاي دو شركت؟

• حل





A

$\delta_1 = 27$

B

$\delta_1 = 27$

$96\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/04$

اطمينان ←

$Z = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/04}{4}} = Z_{98} = 2/06$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - Z_{\alpha} \delta_{12} \pm \delta_{22} \langle M_1 - M_2 \langle X_1 - X_2 + Z \quad {}_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$\sqrt{\frac{(27)^2}{40} + \frac{(31)^2}{40}}$$

$$649 - 635 - 2/06 \quad + \quad \langle M_1 - M_2 \langle 649 - 635 + 2/06$$

$$40 \qquad 40$$

$$0/64 \langle M_1 - M_2 \langle 27/36$$

• مثال

www.neveshtani.com

دو ماشين A و B جعبه هاي 8 گرمي از يك ماده را بسته بندي مي كنند.

انحراف معياروزن بسته هاي پر شده به وسيله ماشين A وB به ترتيب 4% و5 % گرم است.

از جعبه هاي پر شده هريك از ماشينها 100 جعبه به تصادف انتخاب شده به طوريكه ميانگين نمونه جعبهA=8/18 و ميانگين نمونه جعبه B=8/15 به دست آمده فاصله اطمينان 99% براي تفاضل ميانگين وزنهاپرشده با دو ماشين AوB را بدست آوريد؟

• حل

$$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/01$$

$$Z = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/01}{2}} = Z_{/995} = 2/58 \quad \longleftarrow \text{اطمينان}$$

$$X_1 - X_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}} \quad \langle M_1 - M_2 \langle \quad X_1 - X_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

• مثال

$$8/18-8/15-2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100}+\frac{(0/05)^2}{100}} < M_1-M_2 < 8/18-8/15+2/58\sqrt{\frac{(0/04)^2}{100}+\frac{(0/05)^2}{100}}$$

$$0/014 < M_1-M_2 < 0/046$$

www.pnu-m-s.com

دريك نمونه 20 تائي از دانشجويان دختر ميانگين و انحراف معياردرس آماربه ترتيب4،12 همين عناصر براي نمونه 22 تائي دانشجو پسر2،11 به دست آمده است.

مطلوبست فاصله اطمينان 90% براي اختلاف ميانگين نمره رياضي دانشجويان دختروپسر؟

• حل

$n_1 = 20$
$\overline{X}_1 = 12$
$\delta_1 = 4$

دختر

$n_2 = 22$
$\overline{X}_2 = 11$
$\delta_2 = 2$

پسر

$n_1, n_2 < 30$

- مثال

$$90\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 10\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/1}{2}(40)} = t_{0(40/95)} = 1/64$$

$$\overline{X_1}-\overline{X_2}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}} \leq M_1-M_2 \leq \overline{X_1}-\overline{X_2}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}}$$

$$12-11-1/64\sqrt{\frac{4^2}{20}+\frac{2^2}{22}} \leq M_1-M_2 \leq 12-11+1/64\sqrt{\frac{4^2}{20}+\frac{2^2}{22}}$$

$$-0/6 \langle M_1-M_2 \langle 2/6$$

دو آزمایشگاه 1 و2 به طور مستقل براي اندازه گیري چربي شیر پاستوریزه اقدام مي نمایند. 10 نمونه از آزمایشگاه يك با میانگین 6 و واریانس 4/67 و 8 نمونه ازآزمایشگاه 2 با میانگین 7 و واریانس 2/57 به دست آمده با فرض نرمال بودن 2 جمعیت و مساوي بودن واریانس ها يك فاصلهاطمینان 95% درصدي براي اختلاف میانگین چربي موجود در شیرهاي دو كارخانه به دست آورید.(واریانس جامعه مجهول و مساوي)

- حل

1

$n_1 = 10$

$\overline{X_1} = 6$

$\delta_1 = 4/67$

2

$n_1 = 2$

$\overline{X_1} = 7$

$\delta_1 = 2/57$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\quad}$$

2

• مثال

$$S_p^2 = \frac{(10-1)4/67 + (8-1)2/57}{10+8-2} \quad n_1 + n_2 - 2 \Rightarrow S_p^2 = 3/75 = S_p = 1/937$$

$$95\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/05\%$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/05}{2}}^{(16)} = t_{0(16/975)} = 2/12$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \langle M_1 - M_2 \langle \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$6 - 7 - 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} \langle M_1 - M_2 \langle 6 - 7 + 2/12 \times 1/937 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}$$

$$-2/35 \langle M_1 - M_2 \langle 0/35$$

فاصله اطمينان براي ثبت جامعه

n_1 ثبت نمونه

P نسبت

جامعه

الف) $n \geq 30$

$$P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \leq P \leq P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

ب) $n < 30$

$$P - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \leq P \leq P + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

d=n-1 درجه آزادي

فاصله اطمينان براي اختلاف نسبت دو جامعه

الف) $n_1, n_2 \geq 30$

$$P_1 - P_2 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} \leq P_1 - P_2 \leq P_1 - P_2 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

ب) $n_1, n_2 < 30$

$$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} \leq P_1 - P_2 \leq P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

درجه آزادي $d_2 = n_1 + n_2 - 2$

- **مثال**

از بين 170 كودك دبستاني كه به تصادف انتخاب شده اند ، 30 نفر داراي دندانه شكسته است. يك فاصله اطمينان 95% براي نسبت كودكاني كه دندان شكسته دارند بيابيد؟

- **حل**

$n = 170 \quad P = \frac{30}{70} = 0/17$

$95\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = 0/05 \quad Z = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0/05}{2}}$

$Z_{0/975} = 1/96$

$$P - \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\, Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < P < P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$0/17 - 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} < P < 0/17 + 1/96\sqrt{\frac{0/17(1-0/17)}{170}} \Rightarrow 0/11 < P < 0/23$$

www.neveshtani.com

- مثال

يك نمونه تصادفي 20 نفره انتخاب و معلوم شده كه 15 نفرآنها به نوعي بيماري مبتلا هستند.

يك نمونه تصادفي 10 نفره ازجمعيت ديگري انتخاب و معلوم شده كه 2 نفر آنها به همان بيماري مبتلاهستند. فاصله اطمينان 99% براي $P_1 - P_2$ پيدا كنيد؟

- حل

$n_1, n_2 \langle 30$

$99\% = 1-\alpha \rightarrow \alpha = \%0/01$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} = t_{1-\frac{0/01}{2}}^{(28)} = t_{0(28/995)} = 2/76$

$P_2 = \frac{2}{10} = 0/2$

$P_1 = \frac{15}{20} = 0/75$

$P_1 - P_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_1}} \; P_1 - P_2 \; P_1 - P_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$

$0/75 - 0/2 - 2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}} \quad \langle P_1 - P_2 \langle 0/75 - 0/2 + 2/76\sqrt{\frac{0/75(1-0/75)}{20} + \frac{0/2(1-0/2)}{10}}$

$0/12 \langle P_1 - P_2 \langle 0/98$

www.neveshtani.com

تمرين

1)65% از كل افرادي كه به فروشگاه مراجعه مي كنند خريد مي كنند اگر در يك روز 03 نفر به اين فروشگاه مراجعه كنند؟ الف) حداقل 22 نفر خريد كنند.

ب) كمتر از 15 نفر خريد كنند.

ج) دقيقا 20 نفر خريد كنند.

2)توزيع نرمال با ميانگين 35 سال و انحراف معيار 12 سال است. اگر خط مشي شركت باز نشسته كردن تمام افرادي باشد كه بيش از 55 سال سن دارند چند درصد از كارگرانبازنشسته مي شوند.

3)براساس تجربه مشخص شده كه يك تلفنچي 3% از تلفن ها را اشتباه وصل مي كند.اگر امروز 150 تلفن وصل كرده باشد.مطلوبست:

الف) ميانگين تلفنهايي كه اشتباه وصل شده است.

ب) احتمال اينكه 3 تلفن را اشتباه وصل كرده باشد.

ج) احتمال اينكه بيش از يك تلفن را اشتباه وصل كرده باشد.

4)تابع احتمال توام دو متغيري yوx به صورت زير است.ضريب همبستگي؟

y / x	0	1	2
-5	0/3	0/03	0/08
10	0/1	0	0/5

نویسنده:

ویدا شنتیا (استاد آمار و کاربرد آن در مدیریت , دانشگاه رودهن)

تهیه و تنظیم:

www.neveshtani.com

بزرگترین مرکز دانلود رایگان جزوات
اموزشی دانشگاهی و مدرسه ای